

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
DE SÃO PAULO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
MECÂNICA

PMC – 580 / 581
PROJETO MECÂNICO I E II

ANÁLISE ESTRUTURAL EM ASAS POR
ELEMENTOS FINITOS

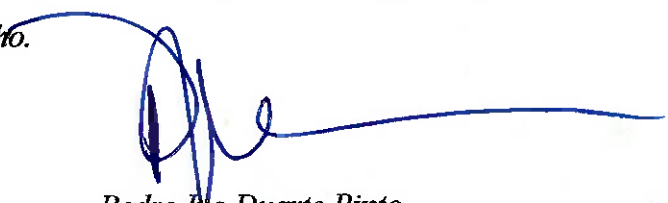
Approved

Orientador : Prof. Marcelo Alves

Aluno : Pedro Ivo Duarte Pinto

Dedico este trabalho à todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a minha entrada, permanência e saída desta escola

Gostaria de agradecer à todos que tornaram este trabalho possível. Em especial ao meu orientador prof. Marcelo Alves que muito me ajudou e tem grande parcela no desenvolvimento deste trabalho.



Pedro Ivo Duarte Pinto

I – APRESENTAÇÃO

O propósito deste trabalho é o estudo teórico das grandezas fundamentais de voo, bem como seus efeitos estruturais em asas subsônicas, afim de um posterior estudo de otimização dos elementos estruturais de asas tais como Nervuras, Longarinas e entelagem.

Para cumprirmos este objetivo, dividimos este trabalho em 3 partes fundamentais :

- *Estudo teórico das forças de voo*
- *Criação de um modelo de asa em balsa entelada*
- *Análise estrutural por Elementos Finitos*

Para o primeiro semestre de 99, fizemos o estudo teórico que ora é descrito. Para o segundo semestre, desenvolveu-se a parte prática constando do desenvolvimento dos modelos em balsa e do modelo em Elementos Finitos. A título de comprovação dos resultados, uma medição de deslocamentos através de relógio comparador também foi feita.

Tenho certeza de que os objetivos foram totalmente alcançados graças à ajuda de diversas pessoas bem como da Escola Politécnica como um todo.

III) INTRODUÇÃO:

A) DUAS GRANDEZAS AERODINÂMICAS BÁSICAS:

Quando pretende-se iniciar o projeto de uma aeronave que utiliza-se de asas para se elevar no ar, inicialmente devem-se analisar os seguintes parâmetros:

- 1. O Peso da carga a deslocar-se em voo (w).*
- 2. A velocidade média na qual deseja-se deslocar esta carga, ou seja, a sua VELOCIDADE DE CRUZEIRO (v_0).*
- 3. As condições termodinâmicas do fluido (no caso o AR) por onde se deslocará a aeronave. Tais condições podem ser expressas com grandezas do tipo:*

PRESSÃO (p_0)

TEMPERATURA (T_0)

DENSIDADE (ρ_0)

VISCOSIDADE ABSOLUTA (μ_0)

em condições de ATMOSFERA PADRÃO ESTÁTICA.

Em outras palavras, dada uma ALTITUDE DE CRUZEIRO de projeto em relação ao NÍVEL MÉDIO DO MAR, definimos um ENVELOPE DE VÔO no qual a aeronave deve operar, de acordo com as condições termodinâmicas do ar naquela altitude segundo o modelo de ATMOSFERA PADRÃO.

OBS.: O MODELO DE ATMOSFERA PADRÃO será explicitado em um capítulo específico.

O problema fundamental em AERODINÂMICA é sempre DESLOCAR UMA CARGA de peso w a uma determinada velocidade v_0 . Para isto é necessário que haja um dispositivo capaz de elevar tal peso utilizando-se para isto da própria velocidade do fluido. Tal

dispositivo é comumente denominado de ASA, que é uma superfície afilada capaz de gerar, por meio de reações aerodinâmicas, a SUSTENTAÇÃO NECESSÁRIA na direção contrária à força peso. A sustentação em uma asa só ocorre devido a geometria diferenciada do seu perfil (denominado AEROFÓLIO): a curvatura deste ao longo de sua CORDA permite o aparecimento de um diferencial de pressão estática entre a superfície superior (ou EXTRADORSO) e a superfície inferior (ou INTRADORSO) da asa, fazendo com que a pressão estática torne-se maior nesta última superfície e assim gerando um empuxo vertical, ou SUSTENTAÇÃO.

Entretanto esta sustentação não é gerada sem nenhum custo. Paralelamente ao deslocamento do corpo existe sempre uma força de ARRASTO que é a força que impede o avanço do corpo no meio fluido. Assim, sempre que houver velocidade haverá também a força de ARRASTO na direção da velocidade. O arrasto depende sobretudo da geometria do corpo e está ligado intimamente com a fricção do fluido em sua superfície. Portanto é necessário que se tenha disponível uma potência capaz de suprir a força de arrasto a fim de manter a velocidade relativa do fluido em relação ao corpo constante e gerar a sustentação necessária. Estas duas grandezas (SUSTENTAÇÃO E ARRASTO) são as duas principais fonte de preocupação da AERODINÂMICA, afinal deve-se procurar sempre gerar a sustentação com o mínimo de potência possível. Toda a análise de performance de uma aeronave ou veículo provém das curvas de sustentação e arrasto em função de um determinado ângulo de ataque. A partir destes conceitos podemos definir as duas primeiras fórmulas aerodinâmicas:

A soma vetorial da SUSTENTAÇÃO ($L = \text{LIFT}$) e do ARRASTO ($D = \text{DRAG}$) dá origem à RESULTANTE AERODINÂMICA (R):

$$R = \sqrt{(L^2 + D^2)} \quad \text{EQ.3.1}$$

E a sua RELAÇÃO é chamada EFICIÊNCIA AERODINÂMICA:

$$\varepsilon = \frac{L}{D} \quad \text{EQ.3.2}$$

Que é a medida de aproveitamento de um perfil, dada a sua geometria. A relação L/D máxima representa o melhor aproveitamento aerodinâmico possível, gerando a maior sustentação com o mínimo arrasto. Seu inverso é a TANGENTE DO MELHOR ÂNGULO DE PLANEIO.

(*) OBSERVAÇÃO:

O fenômeno da sustentação em um aerofólio pode ser explicado intuitivamente do seguinte modo: Imagine duas partículas de fluido caminhando no infinito, em linhas de corrente paralelas, quase juntas a um eixo horizontal Ox de referência (Onde a uma dada posição encontra-se alinhado um perfil de ASA cuja corda coincide com o eixo) à mesma velocidade e pressão estática. Sua energia cinética é aproximadamente a mesma e também apresentam a mesma pressão total. Suponha que ao chegar no BORDO DE ATAQUE do aerofólio uma delas seja desviada para o intradorso e a outra para o extradorso. Geralmente o comprimento total do caminho ao longo da superfície do extradorso é maior do que o comprimento total do caminho ao longo do intradorso, devido à curvatura do aerofólio (ou sua CAMBAGEM). Segundo o princípio de Bernoulli, a energia ao longo de um campo de velocidades IRROTACIONAL e INCOMPRESSÍVEL é constante ao longo de todas as linhas de corrente. Considerando estas duas hipóteses, e portanto válida a lei de Bernoulli, as partículas devem chegar ao bordo de fuga ao mesmo tempo com a mesma velocidade. Para que isto ocorra, a partícula que percorreu maior caminho deve portanto ter acelerado durante uma parte de seu percurso para conseguir chegar ao bordo de fuga ao mesmo tempo que a outra partícula. Esta aceleração implica num acréscimo da energia cinética, velocidade e portanto também um acréscimo de pressão dinâmica. Como ao longo de linha de corrente a Energia é constante, ocorre para isto, também um decréscimo da pressão estática. No intradorso a curvatura é menos acentuada e portanto a aceleração do fluido não é tão intensa, mantendo a pressão estática em níveis mais elevados do que no extradorso. Este DIFERENCIAL de pressão estática é responsável pela SUSTENTAÇÃO. É interessante observar que isto só ocorre devido à diferença de geometria entre o INTRADORSO e o EXTRADORSO, e portanto quanto mais distorcida esta diferença (ou MAIOR a CAMBAGEM do AEROFÓLIO) maior será a sustentação gerada. Perfis simétricos portanto não geram sustentação a não ser que operem sob um ângulo de ataque.

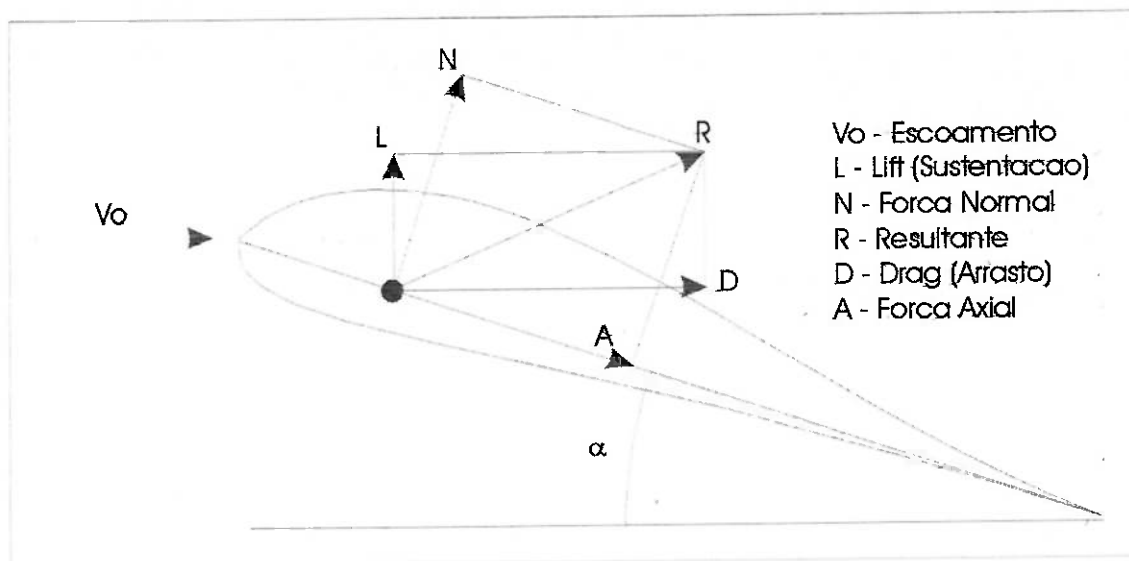


Figura 1 : Esforços Aerodinâmicos

(B) ELEMENTOS DE UM AEROFÓLIO:

OBS.: Toma-se como base de que um aerofólio é definido como uma secção de asa.

Para podermos calcular as forças de SUSTENTAÇÃO e ARRASTO em um perfil deve-se saber em primeiro lugar a SUA GEOMETRIA, sob a forma de pontos tabelados e depois, a posição do aerofólio em relação ao escoamento sob a forma de ÂNGULO DE ATAQUE. Este segundo parâmetro é muito importante pois os diferenciais de pressão dependem também da posição inicial do escoamento em relação ao aerofólio. Quanto maior for a mudança de direção do vetor de velocidade ao longo das superfícies maior será o gradiente de pressão.

Define-se ÂNGULO DE ATAQUE como o ângulo formado entre o escoamento ao longe e a CORDA do AEROFÓLIO. A CORDA é uma importante medida de referência para os cálculos aerodinâmicos e mede aproximadamente o comprimento compreendido entre o ponto mais próximo do bordo de ataque e o ponto mais longínquo do bordo de fuga. Estes pontos são na maioria das vezes os pontos de estagnação, ou seja, onde a velocidade é nula.

Outro elemento de importância é a LINHA DE CAMBER ou CABBAGEM que serve de parâmetro para a medida da curvatura do perfil, é definida como a linha que une os pontos médios entre o intradorso e o extradorso. O ponto de máxima curvatura do aerofólio encontra-se no ponto máximo da linha de camber. A ESPESSURA do aerofólio é a medida entre a CORDA e a LINHA de CAMBER. Abaixo ilustra-se um aerofólio com suas principais características geométricas:

Figura 2: Elementos de um AEROFÓLIO

(C)ELEMENTOS DE UMA ASA:

Levando em conta de que uma ASA é um conjunto de AEROFÓLIOS dispostos a fim de se formar um corpo tridimensional, temos os seguintes elementos que a caracterizam:

OBS.: Convenciona-se como origem do sistema de coordenadas o ponto mais próximo do bordo de ataque do PERFIL central da asa, que a divide simetricamente em duas SEMI-ASAS.

b = Envergadura: DISTÂNCIAS ENTRE AS DUAS PONTAS DAS SEMI-ASAS medida ao longo do eixo y .

$c(y)$ = corda: Comprimento da corda em cada secção (PERFIL) variável ao longo da envergadura, medida ao longo do eixo x .

C_t = Comprimento da corda na ponta da SEMI-ASA.

C_r = Comprimento da corda na raiz da SEMI-ASA.

Enflexamento = Ângulo compreendido entre o BORDO de ATAQUE e eixo Oy .

Torção Geométrica ou "WASH OUT" = Aquilo entre cada corda e o eixo z .

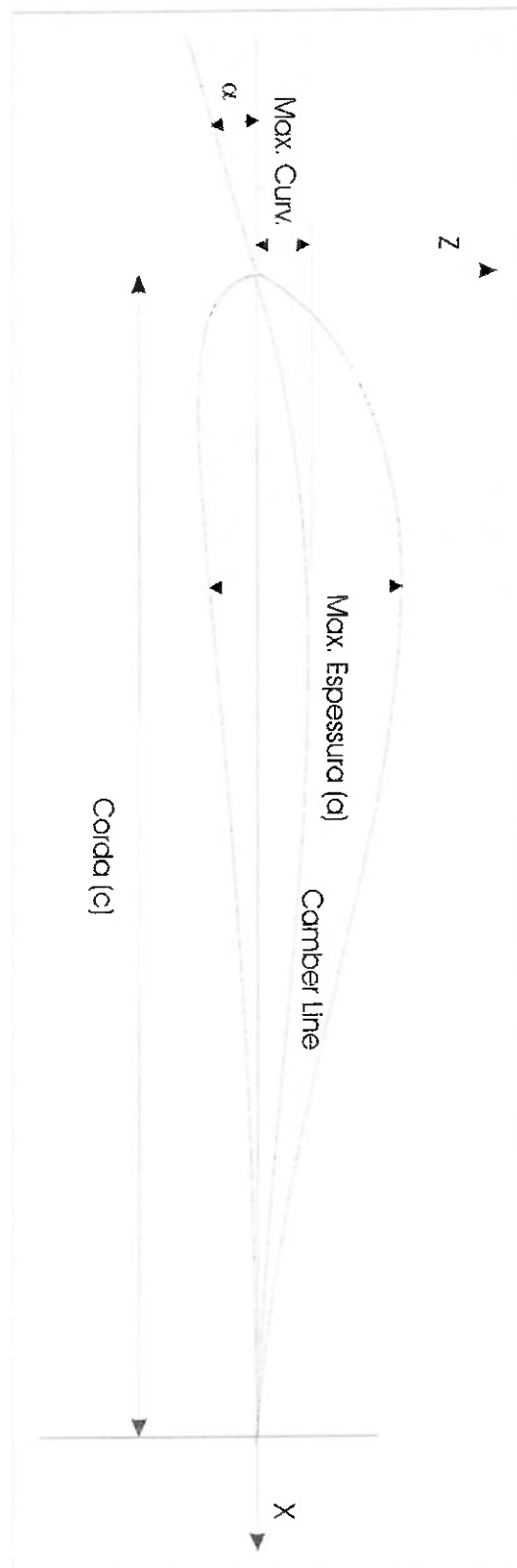


Figura 3: Elementos de uma asa.

IV) PRINCIPAIS GRANDEZAS AERODINÂMICAS :

Definidos os principais componentes de uma asa e alguns conceitos aerodinâmicos, vamos agora definir matematicamente as principais grandezas aerodinâmicas necessárias para o desenvolvimento da teoria de SUSTENTAÇÃO e ARRASTO para asas.

A) FORÇAS e MOMENTOS :

Considere uma ASA de perfil qualquer imersa em escoamento com perfil de velocidades uniforme no infinito de intensidade v_0 e com condições estáticas de pressão e temperatura ao longo dados por P_0 e T_0 .

Sejam:

- O sistema de coordenadas fixo ao bordo de ataque do perfil, cujo eixo $0x$ encontra-se orientado com a corda do aerofólio.
- O ângulo formado pela corda do perfil e a direção da velocidade do fluido ao longe (ÂNGULO DE ATAQUE).
- ~~Se o versor normal à corda é paralelo ao eixo $0z$.~~
Se o versor paralelo à corda é ao eixo $0x$.

Como resultado da interação entre o fluido e o corpo surgem, em cada ponto da superfície da ASA dois tipos de esforços:

- Forças Normais induzidas pela pressão do fluido na direção Normal à superfície.
- Forças Tangenciais induzidas por efeitos viscosos do fluido interagindo com a superfície, ligadas à existência da CAMADA LIMITE, induzindo tensões tangenciais (τ).

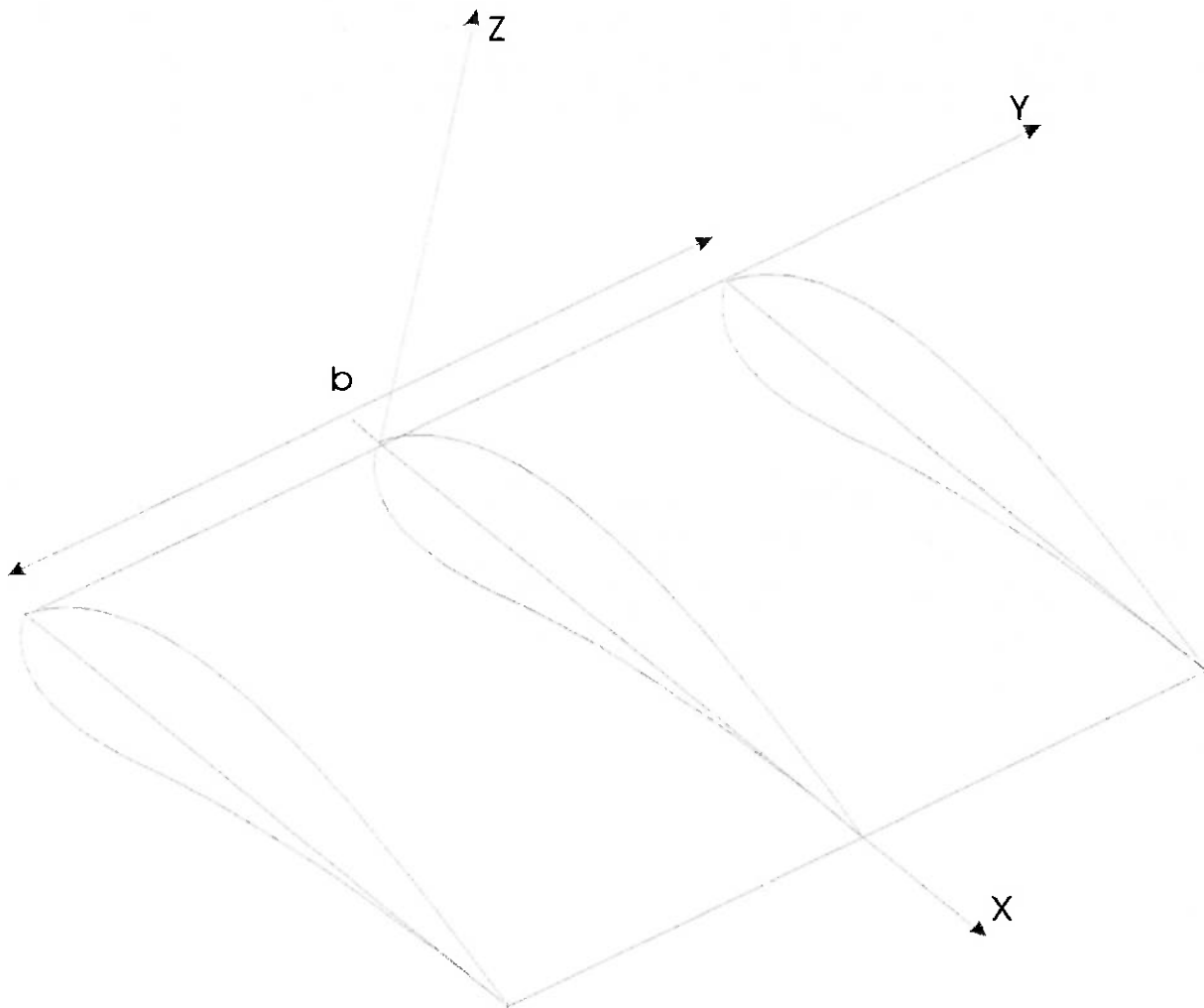


Figura 4: Tensões localizadas na superfícies de uma ASA.

Integrando p e τ ao longo da superfície da ASA, obteremos como resultado a RESULTANTE AERODINÂMICA (R) e tomando momentos em relação à origem de cada $p.dS$ e $\tau.dS$ e integrando, obteremos um momento na direção do eixo y , denominado

MOMENTO DE “PITCH” (M).

OBS.: O momento é considerado POSITIVO no SENTIDO HORÁRIO.

Tomando as projeções de R em relação aos eixos coordenados, temos uma componentes normal N paralela ao eixo Z e uma componente axial A paralela ao eixo x .

Para obter a SUSTENTAÇÃO, perpendicular ao vento relativo e o ARRASTO paralelo ao vento relativo aplica-se a relação:

$$L = N \cdot \cos(\alpha) - A \cdot \sin(\alpha) \quad \text{EQ. 4.1}$$

$$D = N \cdot \sin(\alpha) - A \cdot \cos(\alpha) \quad \text{(EQ. 4.2)}$$

O problema então resume-se a obter N e A , e portanto a distribuição de p e τ ao longo das superfície da asa.

Considere agora a seguinte mudança de coordenadas:

$$X = r \cdot \cos(\beta)$$

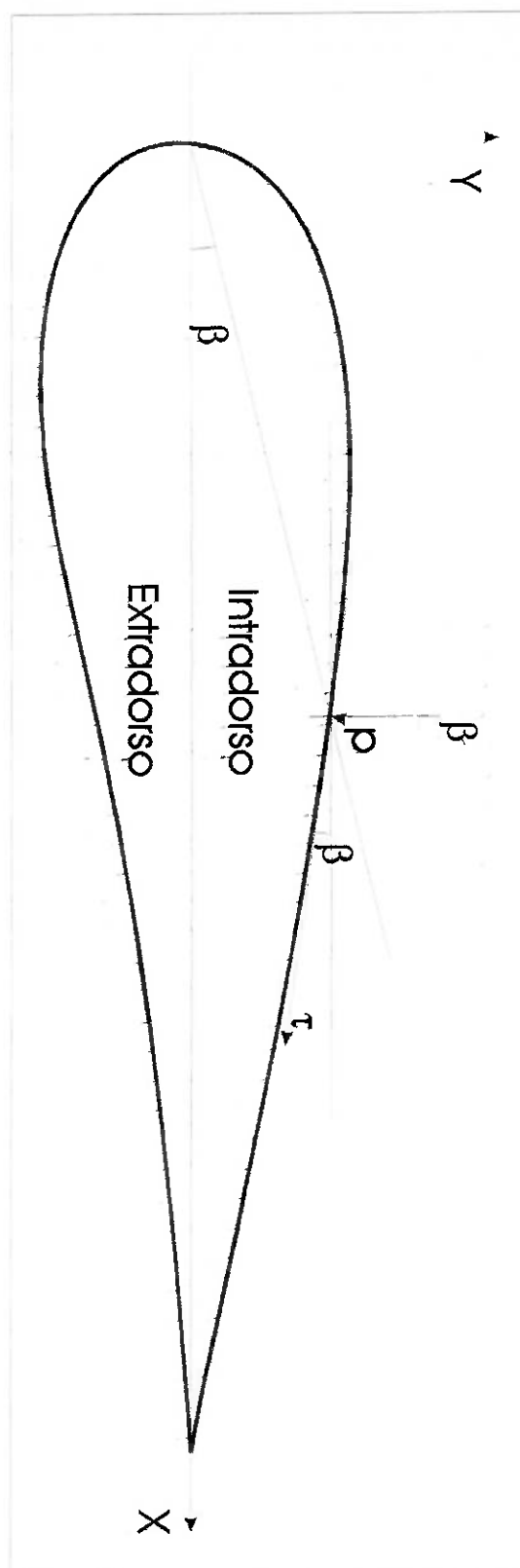
$$Z = r \cdot \sin(\beta)$$

$$\text{onde } r^2 = X^2 + Y^2 \text{ e } 0 < \beta < \pi$$

$S1$: É a coordenada medida na superfície do extradorso da asa a partir da origem.

$S2$: É a coordenada medida na superfície do intradorso da asa a partir da origem.

Figura 5: MUDANÇA DE COORDENADAS



TEMOS NO INTRADORSO:

$$dN1 = -p.b.dS1.\cos(\beta) + \tau.b.dS1.\sin(\beta)$$

$$dA1 = -p.b.dS1.\sin(\beta) + \tau.b.dS1.\cos(\beta)$$

$$dM1 = (p.\cos(\beta) + \tau.\sin(\beta)).x.b.dS1 + (-p.\sin(\beta) + \tau.\cos(\beta)).y.b.dS1$$

TEMOS no EXTRADORSO:

$$dN2 = -p.b.dS2.\cos(\beta) + \tau.b.dS2.\sin(\beta)$$

$$dA2 = -p.b.dS2.\sin(\beta) + \tau.b.dS2.\cos(\beta)$$

$$dM2 = (p.\cos(\beta) + \tau.\sin(\beta)).x.b.dS2 + (-p.\sin(\beta) + \tau.\cos(\beta)).y.b.dS2$$

Considerando FORÇAS E MOMENTOS por UNIDADE de COMPRIMENTO (sendo b a envergadura da asa):

$$dN1 = (dN1/b) = -p.dS1.\cos(\beta) - \tau.dS1.\sin(\beta)$$

$$dA1 = (dA1/b) = -p.dS1.\sin(\beta) + \tau.dS1.\cos(\beta)$$

$$dM1 = (dM1/b) = (p.\cos(\beta) + \tau.\sin(\beta)).x.dS1 + (-p.\sin(\beta) + \tau.\cos(\beta)).y.dS1$$

$$dN2 = (dN2/b) = p.dS2.\cos(\beta) - \tau.dS2.\sin(\beta)$$

$$dA2 = (dN2/b) = p.dS2.\cos(\beta) - \tau.dS2.\sin(\beta)$$

$$dM2 = (dM2/b) = (p.\cos(\beta) + \tau.\sin(\beta)).x.dS2 + (-p.\sin(\beta) + \tau.\cos(\beta)).y.dS2$$

Juntando as equações e integrando temos:

$$L = (L/b) = N \cdot \cos(\alpha) - A \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{EQ 4.6})$$

$$D = (D/b) = N \cdot \sin(\alpha) + n \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{EQ 4.7})$$

O ponto de aplicação da resultante aerodinâmica pode ser determinado com o equilíbrio de momentos tomado em relação à origem (NO BORDO DE ATAQUE).

Definimos X_{cp} como centro de pressões se :

$$\Sigma M = 0 = M + X_{cp} \cdot N = M \cdot b + N \cdot b = 0 \Rightarrow X_{cp} = -M/N$$

mas se o ângulo de ataque for muito pequeno, podemos considerar

$N \approx L$, logo:

$X_{cp} = -M/L$

(EQ 4.8)

Porém se $L = 0$ temos $X_{cp} \rightarrow -\infty$ o que não é conveniente do ponto de vista matemático. Para isto não ocorrer costuma-se tomar como referência a posição $X = c/4$. Verificou-se experimentalmente que este local é próximo à posição do C_p para EFICIÊNCIA AERODINÂMICA MÁXIMA. Logo:

$$M = -(c/4) \cdot L + M_{c/4} = -X_{cp} \cdot L \quad (\text{EQ 4.9})$$

OBS.: Note que em X_{cp} , $M = 0$ pois lá deve ser aplicada L .

Onde $M_{c/4}$ é o momento tomado em relação a origem na posição $x_0 = c/4$.

B) PRINCIPAIS COEFICIENTES AERODINÂMICOS:

É interessante que se adimensionalize os resultados, para que as grandezas aerodinâmicas calculadas em uma asa específica sejam proporcionais às grandezas aerodinâmicas de outras suas GEOMETRICAMENTE SEMELHANTES.

Define-se neste ponto a grandeza PRESSÃO DINÂMICA : (q)

$$q = (1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \quad [\text{Pa}] \quad (\text{EQ. 4.10})$$

onde: ρ = Densidade do fluido ao longe [Kg/m^3]

v_0 = Velocidade do fluido ao longe [m/s]

Pela Equação de Bernoulli, a parcela de Energia cinética carregada pelo fluido (pressão dinâmica), somada a pressão estática local e à pressão devido ao potencial gravitacional ($p_z = \rho \cdot g \cdot z$) representam uma GRANDEZA CONSTANTE para escoamentos irrotacionais e incompressíveis, ao longo de uma mesma linha de corrente. Esta grandeza é a PRESSÃO TOTAL ou PRESSÃO DE ESTAGNAÇÃO associada à esta linha de corrente. Assim:

$$P_t = p_0 + q + \rho \cdot g \cdot z = \text{cte} \quad \text{ou} \quad p_{01} + q_1 + p_{z1} = p_{02} + q_2 + p_{z2} \quad (\text{EQ. 4.11})$$

1,2 : Pontos distintos de uma linha de corrente.

Deste modo podemos adimensionalizar as grandezas L , D e M por meio de COEFICIENTES:

1) COEFICIENTES DE SUSTENTAÇÃO: (C_l)

$$C_l = \frac{L}{q \cdot S_{\text{ref}}} = \frac{L \cdot b}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{\text{med}} \cdot b} = \frac{L}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{\text{med}}}$$

(EQ. 4.12)

onde:

S_{ref} = Superfície Aerodinâmica de referência. É uma grandeza que depende do contexto do problema. Para asas, esta superfície é a Área da asa vista de Planta ou o produto da corda Média Aerodinâmica pela envergadura.

A CORDA MÉDIA AERODINÂMICA é dada pela relação:

$$c_{med} = \frac{\int c(y)^2 \cdot dy}{S_{ref}} \quad (EQ 4.13)$$

2) COEFICIENTE DE ARRASTO : (C_d)

$$C_d = \frac{D}{q \cdot S_{ref}} = \frac{D \cdot b}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{med} \cdot b} = \frac{D}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{med}} \quad (EQ 4.14)$$

3) COEFICIENTE DE MOMENTO: (C_m)

$$C_m = \frac{M}{q \cdot S_{ref}} = \frac{M \cdot b}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{med} \cdot b} = \frac{M}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \cdot c_{med}} \quad (EQ 4.15)$$

Note que, quando tomamos como base as Forças por unidade de Área, os coeficientes não mais dependem da ASA utilizada e sim apenas do perfil, cuja corda tem o tamanho de $c=c_{med}$.

Além destes coeficientes existem ainda mais dois relacionados com p e T , que avaliam seus valores locais. São eles:

4) COEFICIENTE DE PRESSÃO : (C_p)

$$C_p = \frac{\Delta}{q} = \frac{p - p_0}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2} \quad (EQ. 4.16)$$

Onde: p = PRESSÃO LOCAL [Pa]

p_0 = PRESSÃO AO LONGE [Pa]

Logo podemos também estimar p por C_p :

$$p = p_0 + C_p \cdot (1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2 \quad (EQ. 4.17)$$

5) COEFICIENTE DE ATRITO: (C_f)

$$C_f = \frac{\tau}{q} = \frac{\tau}{(1/2) \cdot \rho \cdot v_0^2} \quad (EQ. 4.18)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento local [Pa]

Podemos finalmente escrever C_l , C_d e C_m (que são valores globais) em função de C_p e C_f (que são valores locais). Assim substituindo os valores de C_p e C_f nas equações 4.4, 4.5 e 4.6 e aplicando as definições às equações:

$$C_l = \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \int_0^c (C_{p1} - C_{p2}) \cdot dX + \int_0^{Y(x)} (C_{f1} - C_{f2}) \cdot dY \right] - \sin(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \int_0^{Y(x)} (C_{p1} - C_{p2}) \cdot dY + \int_0^c (C_{f1} - C_{f2}) \cdot dX \right] \quad (EQ. 4.19)$$

$$C_d = \sin(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \int_0^c (C_{p1} - C_{p2}) \cdot dX + \int_0^{Y(x)} (C_{f1} - C_{f2}) \cdot dY \right] + \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{1}{c} \cdot \int_0^{Y(x)} (C_{p1} - C_{p2}) \cdot dY + \int_0^c (C_{f1} - C_{f2}) \cdot dX \right] \quad (EQ. 4.20)$$

$$C_m = \frac{1}{c^2} \left[\int_0^c (C_{p1} - C_{p2}) X dX - \int_0^{Y(x)} (C_{f1} - C_{f2}) X dY + \int_0^{Y(x)} (C_{p1} - C_{p2}) Y dY + \int_0^c (C_{f1} - C_{f2}) Y dX \right]$$

(EQ 4.21)

Onde:

C_{p1} = Coeficiente de pressão local no EXTRADORSO.*C_{p2}* = Coeficiente de pressão local no INTRADORSO.*C_{f1}* = Coeficiente de fricção local no EXTRADORSO.*C_{f2}* = Coeficiente de fricção local no INTRADORSO.*c* = corda do Aerofólio estudado.*X, Y*: pontos tabelados ao Aerofólio.

Note que o problema se resolve se conhecermos a distribuição de pressões e tensões de cisalhamento sobre cada ponto de superfície do aerofólio. Entretanto esta é uma tarefa difícil, pois não existe função analítica conhecida que descreva com exatidão o comportamento de *C_p* ou *C_f*, dada a geometria do aerofólio, pois isso implicaria na resolução da Equação de Navier Stokes.

Atualmente isto pode ser resolvido por meio de avançados programas que utilizam-se de MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS rodando em computadores muito rápidos e precisos, o que foge do escopo do desenvolvimento de um estudo a nível de graduação. Neste estudo propomos introduzir outros conceitos matemáticos mais simples, porém capazes de resolver o problema da sustentação e do arrasto com razoável precisão e sob outro enfoque: O USO DA FUNÇÃO POTENCIAL DE VELOCIDADES para se determinar a circulação ao longo da asa e da TEORIA DA CAMADA LIMITE para, a partir de seus resultados, calcular aproximadamente *C_L* e *C_D*.

Inicialmente começaremos resolvendo o problema para uma secção de asa ou AEROFÓLIO, para depois, com seus resultados, desenvolver a teoria para uma ASA.

V) CÁLCULO DE SUSTENTAÇÃO, ARRASTO E MOMENTO EM AEROFÓLIO:

CÁLCULO DA SUSTENTAÇÃO:

A determinação da sustentação em um perfil está fortemente ligada à distribuição de velocidade do escoamento nas regiões próximas à superfície deste, pois, pela equação de Bernoulli pode-se obter a pressão agindo em determinado ponto a partir da velocidade do fluido ao longo de uma linha de corrente.

Entretanto só a pressão não é suficiente para o cálculo da sustentação, pois esta depende ainda da distribuição de tensões de cisalhamento na asa, que por sua vez dependem do comportamento da camada limite local, ou seja da distribuição de velocidade do fluido junto a parede. Portanto a determinação de velocidades é fundamental no cálculo da sustentação, seja em análise MACRO (no caso da equação de Bernoulli) ou MICRO (no caso da camada limite).

A determinação exata destas grandezas implica na resolução direta da equação de Navier Stokes, o que foge ao escopo deste trabalho. Assim utilizaremos outras ferramentas para o este tipo de cálculo utilizando-se para isto da TEORIA DA VELOCIDADE POTENCIAL/FUNÇÃO DE CORRENTE e do TEOREMA DE KUTTA-JOUKOVSKI, para então determinar um modelo matemático mais simples, porém eficiente.

Inicialmente vamos definir duas ferramentas fundamentais para a análise de escoamentos.

1) FUNÇÃO DE CORRENTE:

Da MECÂNICA DOS FLUIDOS segundo o modelo de Euler, sabe-se que as linhas de corrente em um escoamento podem ser definidas em duas dimensões para coordenados cartesianas por:

dy vy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow v_x \cdot dy - v_y \cdot dx = 0 \quad (EQ. 5.1)$$

Onde: V_x = Componente de velocidade da partícula fluida na direção x

V_y = Componente de velocidade da partícula fluida na direção y

Admitindo que exista uma FUNÇÃO DE PONTO $\psi(x,y) = cte$ ao longo de uma linha de corrente que caracteriza quantitativamente esta linha de alguma forma, temos:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial X} dX + \frac{\partial \psi}{\partial Y} dY = 0 \quad (EQ 5.2)$$

Juntando as equações 5.1 e 5.2 temos Que.:

$$\frac{d\psi}{dX} = -V_y \quad (EQ 5.3)$$

$$\frac{d\psi}{dY} = V_x \quad (EQ 5.4)$$

Observe que se o movimento da partícula fluida for IRROTACIONAL:

$$rot V = \nabla_x V = \frac{dV_y}{dX} - \frac{dV_x}{dY} = \frac{d^2 \psi}{dX^2} + \frac{d^2 \psi}{dY^2} = \nabla^2 \psi = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dX^2} + \frac{d^2 \psi}{dY^2} = 0 \text{ Obedece a equação de Laplace}$$

2) FUNÇÃO VELOCIDADE POTENCIAL:

Do cálculo vetorial temos:

“ Se o ROTACIONAL DE UM VETOR FOR NULO, EXISTE SEMPRE UMA FUNÇÃO DE PONTO CUJO GRADIENTE É ESTE VETOR”

Logo: $v = \text{grad } \phi$ se $\text{rot } v = 0$

Sendo ϕ a função escalar que representa o POTENCIAL do vetor de velocidade em um escoamento IRROTACIONAL.

$$\text{Portanto } v_x = \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{EQ. 5.3}) \quad e \quad v_y = \frac{d\phi}{dy} \quad (\text{EQ. 5.4})$$

Pela EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE, temos:

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho v) = 0$$

Admitindo REGIME PERMANENTE:

$$\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow \text{grad } \rho v = 0$$

Admitindo FLUIDO INCOMPRESSÍVEL: $\rho = \text{cte} \Rightarrow \rho \text{div } v = 0$

Logo: $\text{div } v = 0$

Sendo: $v = \text{grad } \phi$ temos:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} = 0$$

$dx \quad dy$

Que é novamente a equação de Laplace, o que nos leva a concluir que, para que a função potencial obedeça à equação de Laplace, o fluido deve ser: **IRROTACIONAL** e **INCOMPRESSÍVEL**, escoando em **REGIME PERMANENTE**.

A partir dos resultados acima pode-se demonstrar que as linhas de corrente e as linhas equipotenciais são **ORTOGONAIS** e são dadas pela relação:

$$\frac{dy}{dx} \bigg|_{\phi = \text{cte}} = - \frac{dx}{dy} \bigg|_{\psi = \text{cte}}$$

A grande vantagem de se usar a Equação de Laplace é a sua **LINEARIDADE** ou seja, permite que soluções particulares sejam superpostas a fim de se obter uma solução geral ou ainda decompor um escoamento complicado em uma série de escoamentos fundamentais. Além disso as soluções de equações de Laplace são de fácil convergência numérica ou, dependendo do caso, apresentam forma analítica. Este trabalho adotará as equações de Laplace para desenvolver o método numérico de cálculo de sustentação em aerofólios.

Resumindo, podem-se escrever as componentes do vetor velocidade como:

$$v_x = \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \quad (\text{EQ 5.5}) \qquad v_y = - \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\phi}{dy} \quad (\text{EQ 5.6})$$

E adotaremos como hipóteses fundamentais:

- **REGIME PERMANENTE**.

- **ESCOAMENTO IRROTACIONAL**.

- ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL.

Que são suficientes para aerofólios operando em regime de CRUZEIRO BAIXO SUBSÔNICO ($Mach < 0.3$), para que se as funções θ e ϕ obedecem à Equação de Laplace.

A partir destes resultados escrevemos a forma de cálculo das velocidades relativas aos principais tipos de escoamento bi - dimensionais envolvidos no cálculo da sustentação de um aerofólio.

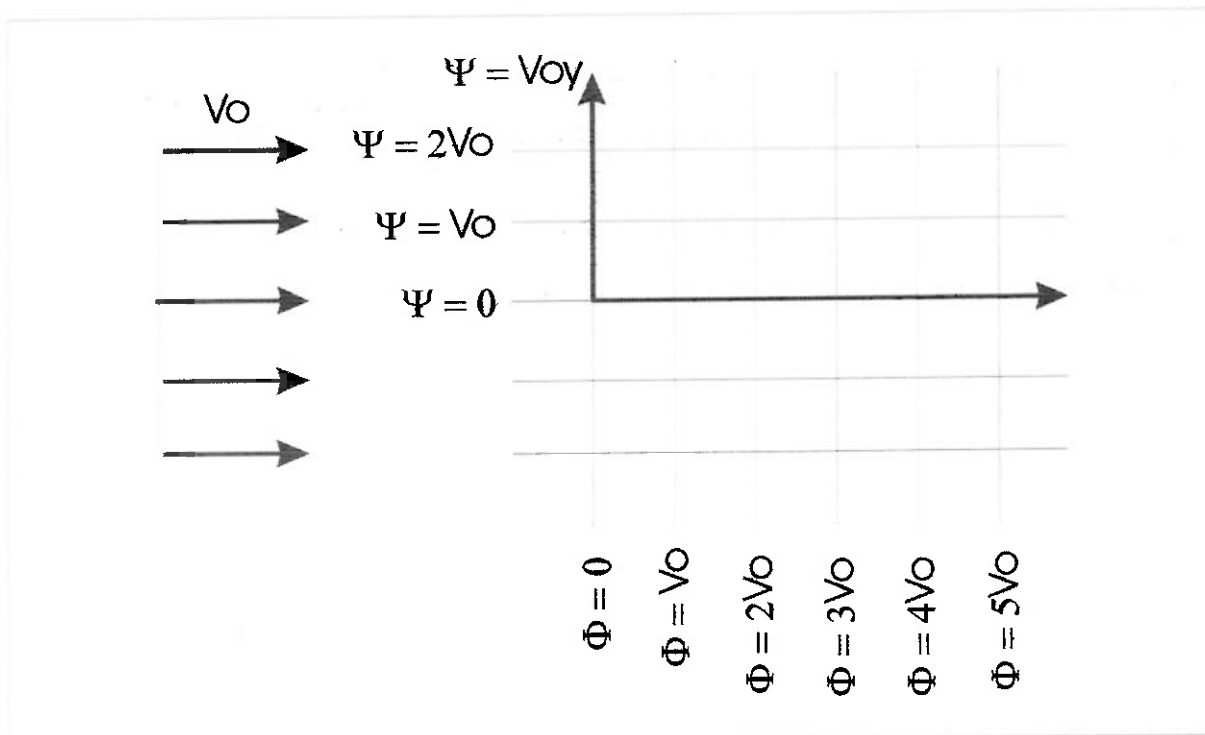


Figura 6: ESCOAMENTO UNIFORME e suas LINHAS EQUIPOTENCIAIS:

4) VÓRTICE IDEAL:

Suponha um escoamento com a seguinte distribuição de velocidades:

$$C I$$

$$v_{\theta} = \frac{C I}{r}$$

$$v_r = 0$$

Onde: $\theta = \arctan (y/x)$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Note que as velocidades são sempre perpendiculares ao raio vetor de um dado ponto $P(x,y)$ e aumentam de valor a medida que nos aproximamos da origem . $P (0,0)$ é um ponto singular, cujo valor da velocidade tangencial é infinito.

Neste ponto é necessário definir uma nova grandeza física de grande importância: CIRCULAÇÃO.

Considere uma curva fechada Γ , que nunca se cruza em si, orientada no sentido HORÁRIO, situada numa secção contida em um escoamento de campo de velocidades qualquer.

Definimos como CIRCULAÇÃO como a INTEGRAL DE LINHA:

$$\Gamma = -\oint V(x,y)dl \quad [m^2/s]$$

Aplicando esta definição no escoamento de VÓRTICE (tomando como referência uma curva fechada que envolva a origem em circunferências perfeitas):

$$dl = r.d\theta$$

$$\Gamma = -\oint V(x,y)dl = -\oint V(r,\theta).r.d\theta = -v_{\theta}.r.2.\pi$$

logo:

$$v_{\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

neste caso Γ é denominado INTENSIDADE DE VÓRTICE, e é uma grandeza finita que caracteriza o vórtice de maneira quantitativa.

Aplicando as definições de função potencial e de corrente para coordenadas cilíndricas temos:

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\theta} = v_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = -\frac{d\Phi}{dr} = v_{\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Resolvendo conjuntamente este sistema de equações temos:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (EQ 5.9)$$

e

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \quad (EQ 5.10)$$

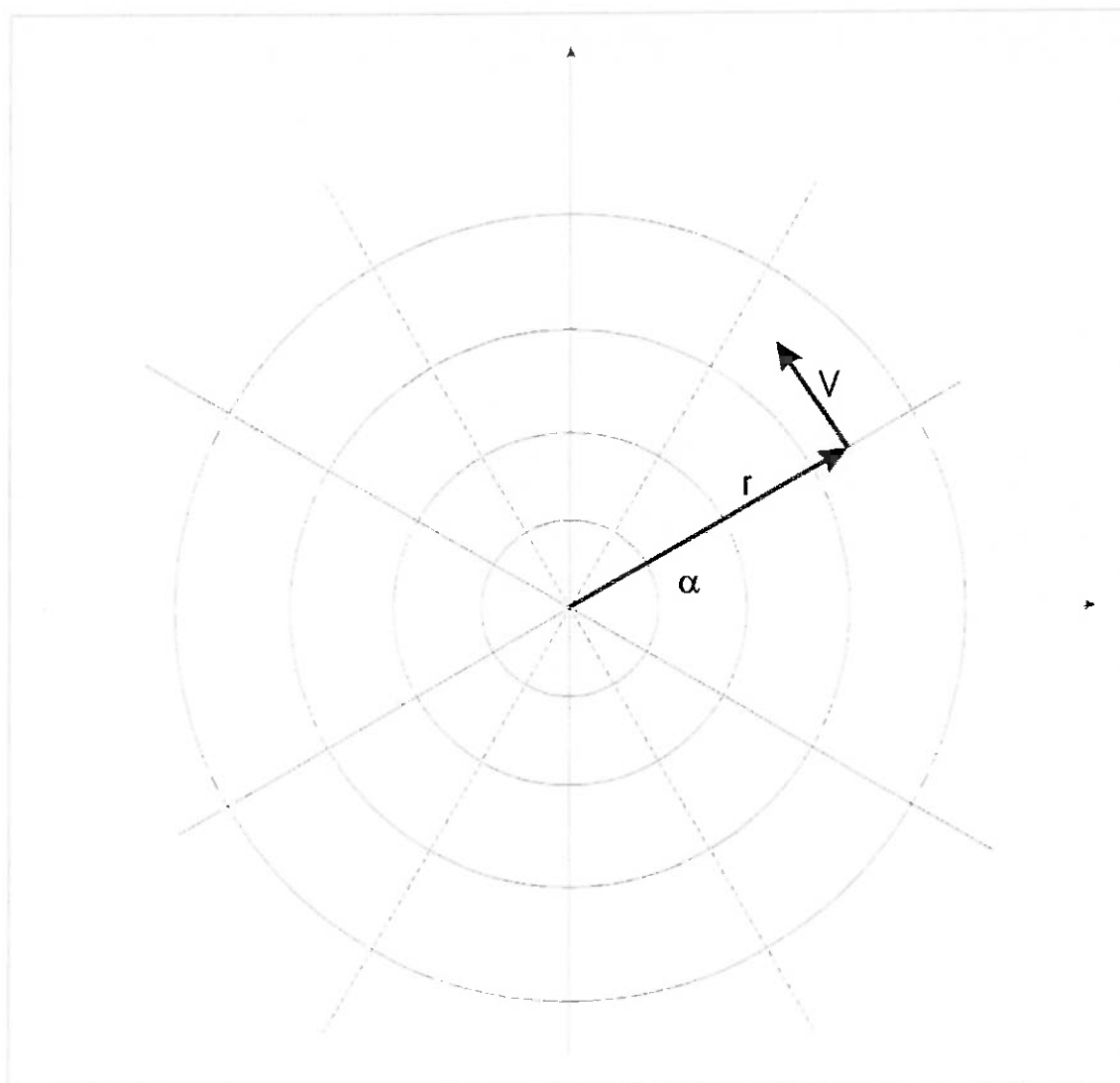


Figura 5 : VÓRTICE IDEAL

Definimos a seguir, outro conceito matemático importante, demonstrado no início do século simultaneamente por dois matemáticos russos e que representa a mais poderosa ferramenta atual para os modelos aerodinâmicos de escoamento incompressível.

5) TEOREMA DE KUTTA - JOUKOVSKI:

Considere um escoamento bi-dimensional incompressível em torno de um aerofólio. Seja uma curva S fechada que contenha o aerofólio. Se o aerofólio produzir sustentação, o campo de velocidades em torno do aerofólio será tal que a integral de linha da velocidade

ao longo de S será finita e representará uma CIRCULAÇÃO FINITA. O teorema de Kutta-Joukowski diz que a sustentação por unidade de comprimento será diretamente proporcional à circulação gerada pela seguinte equação:

$$l = \rho O.v_0.\Gamma \quad (EQ 5.11)$$

ρ 0: Densidade do fluido ao longe.

v_0 : Velocidade do fluido ao longe.

OBS.: Este teorema pode ser facilmente comprovado ao se calcular a sustentação em torno de um semi-cilindro, utilizando-se para isto as soluções de escoamento potencial para um dipolo associado ao escoamento uniforme.

Assim pode-se facilmente determinar a SUSTENTAÇÃO gerada por um aerofólio se encontrarmos alguma maneira de calcular a circulação em torno deste. Sabe-se que a circulação LOCAL em um ponto pode ser determinada pela resolução da equação de Laplace para escoamento de um vórtice ideal, de acordo com os resultados acima obtidos. O problema resume-se então a encontrar de algum modo a CIRCULAÇÃO TOTAL em torno de um perfil, levando em conta a influência de cada vórtice local.

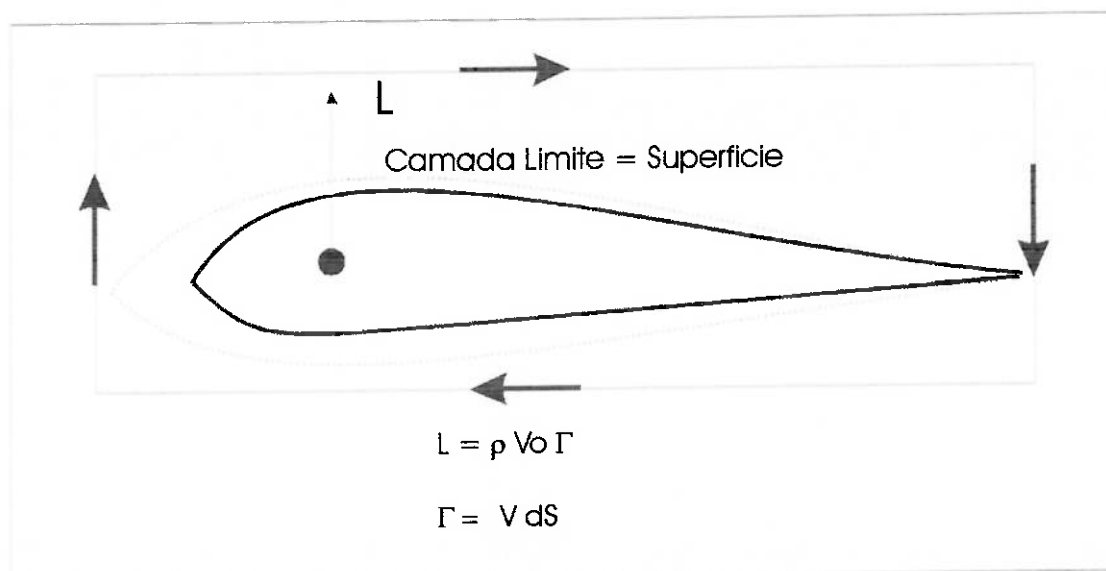


Figura 6: TEOREMA DE KUTTA-JOUKOVSKI

Para resolver este problema, Prandtl no início do século também, sugeriu uma nova teoria para o tratamento dos vórtices, a TEORIA DA MALHA DE VÓRTICES, utilizando-se para isto do MODELO DE FILAMENTO DE VÓRTICE.

6) TEORIA DA MALHA DE VÓRTICES:

Dado um ponto 0, no qual situa-se o centro de um vórtice de intensidade Γ , considera-se uma reta associada perpendicularmente ao plano do vórtice como um filamento ao longo do qual sempre existe um vórtice associado de intensidade 1, qualquer que seja a posição adotada sobre esta reta. Tem-se portanto um FILAMENTO DE VÓRTICE DE INTENSIDADE Γ . O escoamento induzido nos planos perpendiculares à esta reta é idêntico ao longo destes, já que o vórtice tem intensidade constante Γ .

Imagine um conjunto de filamento de vórtices colocados lado a lado paralelamente no espaço.

Seja S a coordenada medida perpendicularmente a estes filamentos.

Seja δ a intensidade de um vórtice por unidade por comprimento S , de tal forma que tomemos um comprimento infinitesimal sobre esta curva, pode-se definir (Figura 7):

$$d\Gamma = \gamma dS \rightarrow \Gamma = \int \gamma dS \quad (\text{EQ. 5.12})$$

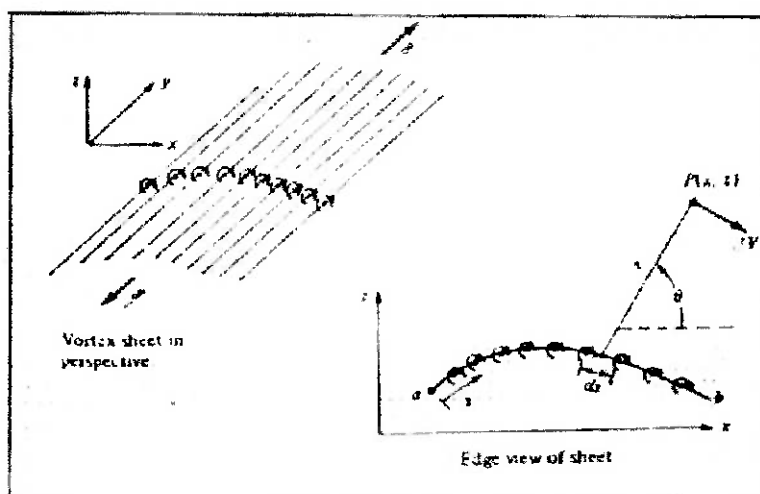


Figura 7: MALHA DE VÓRTICE

Assim, dado um ponto P no espaço, não contido na curva S , a VELOCIDADE INDUZIDA neste ponto será, pela teoria do vórtice ideal:

$$dv = -\frac{d\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\gamma dS}{2\pi r} \quad (\text{EQ. 5.14})$$

e também pela equação (5.9) temos:

$$d\Phi = \frac{d\Gamma}{2\pi} \theta \quad (\text{EQ. 5.15})$$

que integrando temos:

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int \theta \gamma dS \quad (\text{EQ. 5.16})$$

Para sabermos a circulação total gerada pelos vórtices ao longo de toda a curva S , basta integrar a equação 6.1 e portanto obter L :

$$L = \rho \cdot v_o \cdot \int_S \gamma dS \quad (\text{EQ. 5.17})$$

Se fizermos a curva S acompanhar o perfil do aerofólio, obteremos diretamente a sustentação gerada por este.

Convém notar que esta teoria não considera os efeitos locais provocados pela camada limite pois, dentro desta, próximo às paredes do aerofólio o efeito de viscosidade torna:

$$\text{GRAD } v \neq 0$$

Invalidando a aplicação da função potencial nesta região. Assim para efeito apenas de cálculo da sustentação CONSIDERAMOS QUE A ESPESSURA DO AEROFÓLIO e PRATICAMENTE COINCIDE COM AS PAREDES DESTA. Portanto, para efeito de cálculo, temos:

$$\text{GRAD } v = 0$$

Até muito próximo da superfície do aerofólio, para podermos aplicar os resultados da função potencial.

Definidas as principais ferramentas matemáticas, desenvolveremos a seguir a um método capaz de calcular a distribuição de CIRCULAÇÃO LOCAL ao longo de um aerofólio.

7) MÉTODO DOS PAINÉIS DE VÓRTICES:

Dado um aerofólio qualquer tabelado ponto a ponto, e definidas suas condições de operação (Velocidade do escoamento do fluido ao longe e estado termodinâmico deste), pode-se subdividir as curvas que determina seu perfil em um numero finito (N) de trechos retilíneos ou painéis. A cada painel podemos associar uma singularidade do tipo vórtice e substituir a superfície do aerofólio por uma MALHA DE VÓRTICE associadas a uma cadeia de painéis.

Isto pode ser feito (e tem significado físico real) pois, devido a presença da camada limite, aparecem vorticidades associadas à superfície do aerofólio através de efeitos viscosos e gradientes de velocidade finitos neste local. Assim, nada melhor do que vórtices ideais para modelar este efeito.

Seja um painel j qualquer na superfície de um aerofólio. Este painel apresenta um vórtice aplicado Γ_j na posição de $3/4$ do seu comprimento total.

Seja um ponto de controle $P(x,y)$ no espaço, à uma distância r_j do centro do vórtice aplicado ao painel j , que forma um ângulo θ_j com a direção $0x$. (VER Figura 8).

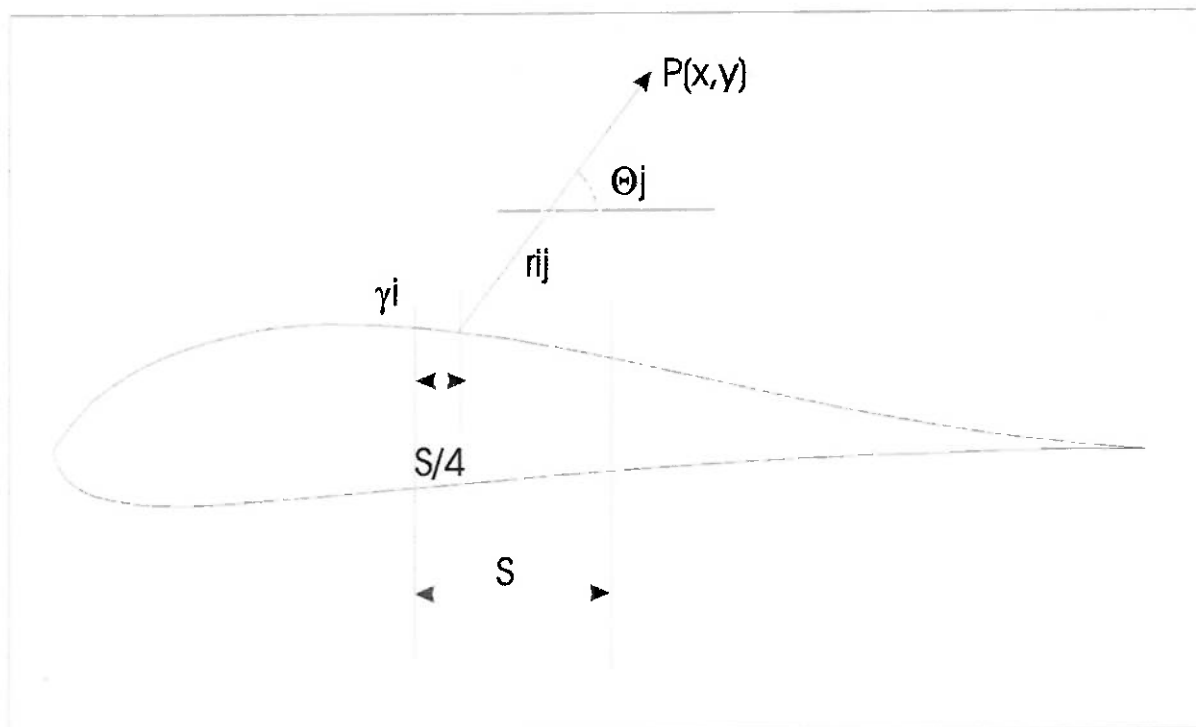


Figura 8 : PONTO DE CONTROLE

O valor da função potencial neste ponto é:

$$\Phi_j = -\frac{1}{2\pi} \int \theta_j \cdot P_j \cdot \gamma_j \cdot dS \quad (EQ 5.18)$$

onde:

$$\Phi_{pj} = \arctan \frac{Y_p - Y_j}{X_p - X_j} \quad (\text{EQ. 5.19})$$

Sendo que a função potencial obedece à equação de Laplace, suas soluções podem ser superpostas e portanto podemos somar todos os valores de Φ_j devido a influência de todos os painéis sobre o ponto P. Assim, neste ponto temos:

$$\Phi(p) = \sum_{j=1}^n \Phi_j = -\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \int \theta_{pj} \cdot dS_j \quad (\text{EQ. 5.20})$$

Admitindo que δ_j seja praticamente constante ao longo de cada painel, passa-se δ_j para fora da integral e portanto:

$$\Phi(p) = \sum_{j=1}^n \Phi_j = -\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \int \theta_{pj} \cdot dS_j \quad (\text{EQ. 5.21})$$

Admitindo que P esteja também contido na superfície do aerofólio, mais precisamente NO CENTRO do i-ésimo, rescrevem-se as equações acima como:

$$\Phi(X_i, Y_i) = -\gamma_i \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int \theta_{ij} \cdot dS_j \right) \quad (\text{EQ. 5.22})$$

$$\theta_{ij} = \arctan \frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} \quad (\text{EQ. 5.23})$$

A (EQ. 7.6) representa fisicamente a contribuição de TODOS OS PAINÉIS à função potencial poninto de controle situado no centro do i-ésimo painel.

Existem, porém, as condições de contorno enviesadas:

- Em cada painel a COMPONENTE NORMAL de velocidade do fluido junto à este é nula, já que existe uma parede física. Esta componente é influenciada tanto pela velocidade do fluido ao longe, quanto pela velocidade induzida pelos vórtices. Assim temos:

$$V_n = 0 = V_{n,\Gamma} + V_{n,\infty} \quad (\text{EQ. 5.24})$$

A componente normal de velocidade devido à velocidade ao longe (v_0), no painel j é:

$$V_{n,\infty} = 0 = V_{\infty} \cdot \cos(\beta_i) \quad (\text{EQ. 5.25})$$

A componente normal de velocidade induzida pelos VÓRTICES é dada por:

$$V_{n,\Gamma} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n_i} = -\frac{\gamma_j}{2\pi} \cdot \int \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_j} \cdot dS_j \quad (\text{EQ. 5.26})$$

Juntando as equações (7.7), (7.8) e (7.9) chega-se finalmente à EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DO MÉTODO DOS PAINÉIS:

$$\frac{\gamma_{ij}}{2\pi} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} \cdot dS_j = V_{\infty} \cdot \cos(\beta_i) \quad (\text{EQ. 5.27})$$

Sendo $i = 1..N$ $j = 1..N$

Note que pode ser montado um sistema linear $N \times N$ onde as incógnitas são os próprios δ_j .

Entretanto devemos ficar atentos a uma segunda condição de contorno, no bordo de fuga de aerofólio, denominada CONDIÇÃO DE KUTTA:

No bordo de fuga, o fluido deve comportar-se do seguinte modo:

1) A circulação total ao longo do aerofólio deve ser tal que o fluido deixe o bordo de fuga suavemente, sem haver cruzamento das linhas de corrente.

2) A velocidade do fluido que sai do extradorso deve ser idêntica à do fluido que sai do intradorso em módulo e direção.

Estas duas leis implicam na igualdade dos vórtices gerados no último painel do intradorso e no último painel do extradorso junto ao bordo de fuga do aerofólio, com MESMA INTENSIDADE, porém em SENTIDOS CONTRÁRIOS. (Figura 10)

Logo:

$$\gamma_j = -\gamma_{(j+1)} \quad (\text{EQ. 5.28})$$

É necessário portanto escolher um dos painéis e não aplicar a equação 7.10, substituindo-a pela 7.11.

Uma vez resolvido o sistema de equações acima, basta aplicar o conceito de circulação para obter a sustentação:

$$L = \rho \cdot V_o \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot S_j \quad e \quad Cl = \frac{2}{V_o} \cdot \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot S_j \quad (\text{EQ. 5.29})$$

A partir da figura auxiliar, vamos tentar estimar o valor da integral $\int_s \frac{\partial \theta}{\partial n} dS$, para que possamos construir os coeficientes do sistema linear acima.

Observamos na figura as seguintes relações geométricas:

$$\alpha_j = \arctan \frac{Y(j+1) - Y(j)}{X(j+1) - X(j)} \quad (\text{EQ. 5.30})$$

$$\alpha_i = 2\pi - \arctan \frac{Y(i+1) - Y(i)}{X(i+1) - X(i)} \quad (\text{EQ. 5.31})$$

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\pi}{2} \quad (\text{EQ. 5.32})$$

$$CX_j = \frac{1}{4}(3.X(j+1) + X_j) \quad (\text{EQ. 5.33})$$

$$CY_j = \frac{1}{4}(3.Y(j+1) + Y_j) \quad (\text{EQ. 5.34})$$

$$CX_i = \frac{1}{2}.(X(i+1) + X_i) \quad (\text{EQ. 5.35})$$

$$CY_i = \frac{1}{2}.(Y(i+1) + Y_i) \quad (\text{EQ. 5.36})$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial n_i} = \cos(\beta_i) \quad (\text{EQ. 5.37})$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial n_i} = \sin(\beta_i) \quad (\text{EQ. 5.38})$$

$$\theta_{ij} = \arctan(u) = \arctan \frac{C_{yi} - C_{yj}}{C_{xi} - C_{xj}} \quad (\text{EQ. 5.39})$$

$$\sin(\beta_i) = \cos(\alpha_i) \quad (\text{EQ. 5.40})$$

$$\cos(\beta_i) = -\sin(\alpha_i) \quad (\text{EQ. 5.41})$$

Sabemos que:

$$d\theta = \left(\frac{d\theta}{dX}\right)dX + \left(\frac{d\theta}{dY}\right)dY = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X}\right)dX + \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial Y}\right)dY = \frac{\partial\theta}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial X}dX + \frac{\partial u}{\partial Y}dY\right)$$

(EQ.5.42)

mas,

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\partial(\arctan(u))}{\partial u} = \frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1 + \frac{(CY_i - CY_j)^2}{(CX_i - CX_j)^2}} = \frac{(CX_i - CX_j)^2}{(CX_i - CX_j)^2 + (CY_i - CY_j)^2}$$

(EQ. 5.43)

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{CY_i - CY_j}{CX_i - CX_j} \right) = - \frac{(CY_i - CY_j)}{(CX_i - CX_j)^2}$$

(EQ. 5.44)

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{CY_i - CY_j}{CX_i - CX_j} \right) = \frac{1}{CX_i - CX_j}$$

(EQ. 5.45)

e portanto:

$$d\theta = \left(\frac{(CX_i - CX_j)^2}{(CX_i - CX_j)^2 + (CY_i - CY_j)^2} \right) \left(\frac{-(CY_i - CY_j)dX + (CX_i - CX_j)dY}{(CX_i - CX_j)^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{r_{ij}^2} (-(CY_i - CY_j)dX + (CX_i - CX_j)dY)$$

(EQ. 5.46)

que derivando em relação a n_i obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial n_i} &= \left(\frac{1}{r_{ij}^2} \right) \left(- (CY_i - CY_j) \frac{\partial X_i}{\partial n_i} + (CX_i - CX_j) \frac{\partial Y_i}{\partial n_i} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{r_{ij}^2} \right) (\sin(\beta_i) (CX_i - CX_j) - \cos(\beta_i) (CY_i - CY_j)) \end{aligned}$$

(EQ. 5.47)

Considere agora a seguinte mudança de variáveis:

$$CX_j = X_j + S_j \cdot \cos(\alpha_j) \quad (EQ. 5.48)$$

$$CY_j = Y_j + S_j \cdot \sin(\alpha_j) \quad (EQ. 5.49)$$

Onde S_j é a coordenada dos pontos sobre o painel j .

Com isto pode-se transformar a função a se integrar em uma relação do tipo QUOCIENTE DE POLINÔMIOS, do tipo:

$$I_{ij} = \int \frac{\partial \theta}{\partial n} dS = \int \frac{C \cdot S_j + D}{S_j^2 + 2 \cdot A \cdot S_j + B} dS_j \quad (EQ. 5.50)$$

Com algum esforço algébrico pode-se determinar os coeficientes A, B, C e D:

$$A = -(CX_i - X_j) \cdot \cos(\alpha_j) - (CY_i - Y_j) \cdot \sin(\alpha_j) \quad (EQ. 5.51)$$

$$B = (CX_i - X_j)^2 + (CY_i - Y_j)^2 \quad (EQ. 5.52)$$

$$C = -(\sin(\alpha_j) \cdot \sin(\alpha_i) + \cos(\alpha_j) \cdot \cos(\alpha_i)) \quad (\text{EQ. 5.53})$$

$$D = (cX_i - X_j) \cdot \cos(\alpha_i) + (cY_i - Y_j) \cdot \sin(\alpha_i) \quad (\text{EQ. 5.54})$$

e definimos E como:

$$E = \sqrt{B - A^2} \quad (\text{EQ. 5.55})$$

Para a relação acima, a integral apresenta SOLUÇÃO ANALÍTICA da forma:

$$I_{ij} = \frac{C}{2} \cdot \ln(S_j^2 + 2 \cdot A \cdot S_j + B) + \frac{(D - A \cdot C)}{E} \cdot \left(\arctan\left(\frac{S_j + A}{E}\right) - \arctan\left(\frac{A}{E}\right) \right) \quad (\text{EQ. 5.56})$$

Finalmente podemos construir o sistema linear acima, calculando todos os coeficientes:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \gamma_j \cdot I_{ij} \right) = -2 \cdot \pi \cdot V_{\infty} \cdot \sin(\alpha_i) \quad (\text{EQ. 5.57})$$

mais a CONDIÇÃO DE KUTTA.

ou seja:

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & \dots & I_{1n} \\ I_{21} & \dots & \dots & \dots & I_{2n} \\ I_{31} & \dots & \dots & \dots & I_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{m1} & \dots & \dots & \dots & I_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \dots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = -2\pi V_\infty \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_3) \\ \dots \\ \sin(\alpha_n) \end{bmatrix} \rightarrow [I][\gamma] = -2\pi V_\infty [\sin(\alpha)] \rightarrow \\
 \rightarrow [\gamma] = -2\pi V_\infty [\sin(\alpha)][I]^{-1}$$

OBS.: Sendo m o painel do bordo de fuga localizado no intradorso e $(m-1)$ o painel do bordo de fuga localizado no extradorso aplica-se a condição de Kutta na linha m da matriz $[I]$, ou seja:

$$\delta_m - \delta_{m-1} = 0$$

CÁLCULO DO ARRASTO

O ARRASTO medido em um corpo submerso em um escoamento bi-dimensional é basicamente efeito da viscosidade do fluido.

A influência do atrito entre uma superfície com velocidade nula e um fluido que escoar adjacente a esta superfície tende a criar, junto a esta, uma força que retarde seu movimento. Esta força, considerada por unidade de área é denominada TENSÃO DE CIZALHAMENTO, que tem direção paralela à superfície. Devido a esta, a velocidade do fluido na superfície é nula e tende a acelerar até o valor da velocidade do fluido ao longe, desenvolvendo-se num perfil crescente de velocidade.

Considere agora que o fluido esteja escoando sobre uma superfície finita qualquer. Suponha que exista um GRADIENTE DE PRESSÃO sobre esta superfície, gerado pela mudança de forma desta, fazendo com que a velocidade do fluido acima da camada de fricção mude de direção e intensidade. Suponha que este gradiente faça com que a pressão cresça ao longo da superfície. Devido à existência do efeito de fricção, associada ao aumento da pressão o perfil de velocidade tende a se detonar cada vez mais para o lado da montante da superfície até que em certa posição a velocidade do perfil se anula em algum ponto acima da superfície e muda de sentido, gerando um FLUXO REVERSO. A consequência disto será a SEPARAÇÃO DA CAMADA LIMITE da superfície alterando drasticamente a distribuição de pressões ao longo do perfil pois, o fluido escoará por cima da camada que descolou e não mais acompanhando a forma do corpo.

O ocorrência da separação da camada limite aumenta o arrasto e diminui drasticamente a sustentação de um aerofólio, já que a distribuição de pressões ao longo deste diminui de magnitude. O fenômeno de deslocamento acompanhado pela súbita quebra da sustentação é denominado STALL.

Assim, podemos definir dois tipos distintos de arrasto:

(1) *ARRASTO DE FRICÇÃO*: Provocado pela componente projetada na direção do escoamento ao longo da *INTEGRAL DE TENSÃO DE CIZALHAMENTO* ao longo do corpo.

(2) *ARRASTO DE PRESSÃO OU DE FORMA*: Provocado pela componente projetada na direção do escoamento ao longo da *INTEGRAL DA DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO* ao longo do corpo.

Para o escoamento tridimensional em uma asa, além dos arrasto de *FRICÇÃO* e *PRESSÃO* ainda existe o *ARRASTO INDUZIDO*, que depende exclusivamente do aspecto ou alongamento da asa utilizada. Este assunto será elucidado no capítulo de *Cálculo de Sustentação em Asa*.

O *ARRASTO DE FRICÇÃO* e o *ARRASTO DE PRESSÃO* formam juntos o chamado *ARRASTO DE PERFIL* no caso de um aerofólio.

Para o cálculo exato destas grandezas em um perfil cuja superfície não é plana, como em um aerofólio, não existem, a nível de graduação, ferramentas para seu cálculo analítico. Para isto, utilizaremos neste estudo, apenas um modelo aproximado, cuja solução é bem conhecida para este nível de trabalho: A *TEORIA DA CAMADA LIMITE PARA PLACAS PLANAS*.

Assim sendo, considerando que um aerofólio apresenta o seu *COMPRIMENTO DE PELO MENOS DEZ VEZES MAIOR QUE SUA ESPESSURA MÁXIMA*, pode-se considerar que, para efeito de arrasto, este se comporte como uma *PLACA PLANA DE COMPRIMENTO IGUAL A SUA CORDA*.

Apresentaremos a seguir os modelos matemático que estimem os dois tipos de arrasto para um aerofólio, considerando que este se comporte como uma placa plana imersa em um escoamento bi-dimensional.

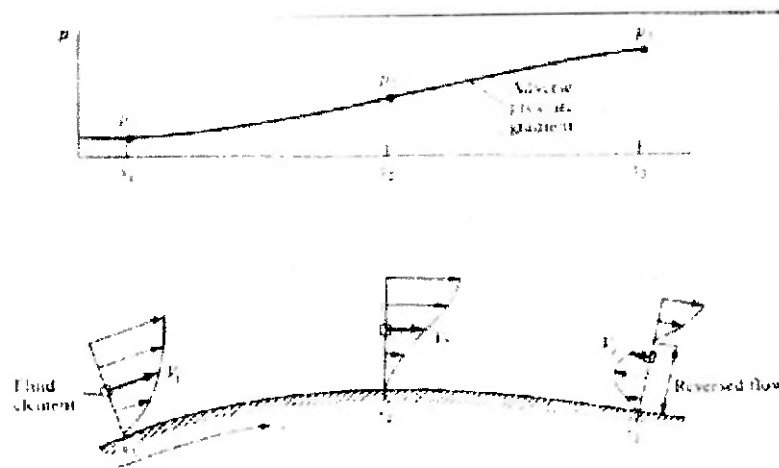


Figura 9 : ESCOAMENTO VISCOZO COM GRADIENTE DE PRESSÃO

1) ARRASTO DE PRESSÃO OU DE FORMA:

Seja uma PLACA plana de comprimento c e espessura b , imersa em um escoamento, que ao longe tem perfil de velocidades uniforme com velocidade v_0 e condições termodinâmicas T_0 e p_0 . A placa forma com a direção da velocidade ao longe de um ângulo.

Nestas condições, a chapa fica sujeita à uma força resultante F provinda da interação entre o fluido e esta. A componente de F paralela à velocidade ao longe é denominada **ARRASTO** e a componente de F perpendicular à velocidade ao longe é denominada **SUSTENTAÇÃO**. (Vide Figura 10)

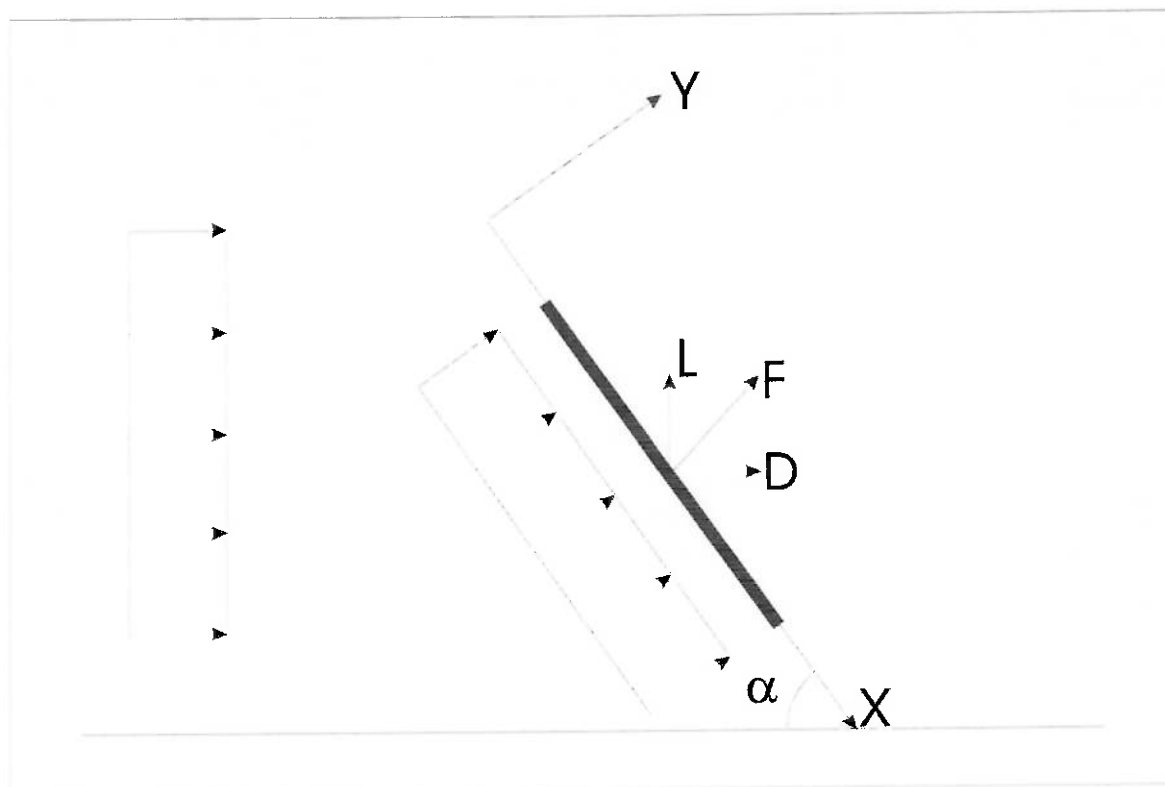


Figura 10: ESFORÇOS ATUANTES NA CHAPA DEVIDO A PRESSÃO TOTAL

OBS.: O ARRASTO DE PRESSÃO deve-se apenas à interação de FORÇAS NORMAIS à superfície do corpo, projetadas na direção da velocidade v_0 .

O fluido carrega consigo uma energia total expressa pela lei de Bernoulli sob forma de pressão :

$$P_t = p_0 + q = p_0 + (1/2)\rho V^2$$

A FORÇA NORMAL à superfície da placa, portanto, pode ser expressa, pela decomposição de forças em :

$$F = q \cdot S \cdot \sin(\alpha) + (p_0 \cdot S - p_0 \cdot S) \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{EQ. 5.58})$$

O ARRASTO é a componente de F na direção de v_0 , ou seja:

$$D = F \cdot \sin(\alpha) = q \cdot S \cdot \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \rho V_0^2 \cdot b \cdot c \cdot \sin^2(\alpha) \quad (\text{EQ. 5.59})$$

Sendo $D = D/b$ temos, para o aerofólio:

$$Cd = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho V_0^2 \cdot c \cdot b} = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho V_0^2 \cdot c} = \sin^2(\alpha) \quad (\text{EQ. 5.60})$$

Considerando o fluido gás perfeito, como é o caso do ar nas condições ISA ($T = 15^\circ\text{C}$ e $p = 101325 \text{ Pa}$), temos:

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_0}{R \cdot T_0} V_0^2 \cdot c \cdot \sin^2(\alpha) \quad (\text{EQ. 5.61})$$

Percebe-se que o coeficiente de arrasto de pressão só depende da posição da chapa em relação ao campo de velocidade uniforme.

2) ARRASTO DE FRICÇÃO:

OBS.; Não pretendemos aqui deduzir as equações que governam a camada limite e sim aproveitar destas, seus resultados.

Considerando novamente a chapa plana em ângulo de ataque, a componente de velocidade paralela à superfície da placa, que inicialmente tem contato com esta à sua montante é:

$$v = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

É esta velocidade inicial que suporemos para a formação da camada limite e não apenas v_0 .

Supondo portanto uma chapa plana, de comprimento c e largura unitária, cujo perfil de velocidades ao longe desenvolve-se com velocidade v , temos inicialmente a formação da camada limite laminar que começa a se desenvolver desde o início da placa até a posição x medida ao longo desta onde o Número de Reynolds vale aproximadamente 5×10^5 .

Para a camada limite laminar, temos pela solução de Blasius, o cálculo exato do COEFICIENTE DE ARRASTO local:

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0,664}{\sqrt{\frac{\rho \cdot v_0 \cdot x}{\mu}}} \quad (EQ. 5.62)$$

que integrando ao longo do comprimento da placa, de 0 a c , obtemos o COEFICIENTE DE ATRITO MÉDIO PARA TODA A PLACA:

$$C_{fmed} = \frac{1}{c} \int_0^c C_f \cdot dx = \frac{1,328}{\sqrt{Re_c}} \quad (EQ. 5.63)$$

A partir da posição crítica onde $Re \geq 5 \times 10^5$, as forças viscosas tendem a aumentar e fazer com que a energia seja dissipada também entre as camadas fluidas, tornando o escoamento turbulento. Existe portanto uma pequena faixa de transição onde o escoamento passa de laminar a turbulento. Para efeito de cálculo esta faixa resume-se a próprio ponto X_{crit} . Portanto a partir desta posição pode-se considerar que o escoamento se desenvolva de forma turbulenta.

Para a camada limite turbulenta, o coeficiente de atrito médio é baseado em observações experimentais e vale:

$$C_{fmed} = \frac{0,074c}{Re c^{0,2}} = \frac{0,074c}{\left(\frac{\rho \cdot V_o \cdot c}{\mu}\right)^{0,2}} \quad (EQ. 5.64)$$

Entretanto não se pode considerar que a partir de X_{crit} o coeficiente de atrito deva valer para o caso turbulento já que a camada limite já se encontrava com espessura desenvolvida de forma laminar. Deve-se compor o coeficiente de atrito médio neste caso, da seguinte forma:

- Uma parcela de C_f laminar até a posição X_{crit} , como se a placa apresentasse este comprimento:

$$\frac{1,328}{\sqrt{Re_{critico}}} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{\rho \cdot V_o \cdot X_{crit}}{\mu}}}$$

mais

- Uma parcela de C_f como se a camada limite fosse TURBULENTA em todo o comprimento da placa:

$$\frac{0,074c}{Re^{0,2}}$$

menos

- Uma parcela de C_f como se a camada limite fosse TURBULENTA até a posição X_{crit} :

$$\frac{0,074X_{crit}}{Re_{crit}^{0,2}}$$

Juntando estes termos podemos chegar à equação fundamental:

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{Re_{crit}}} + \frac{0,074}{Re^{0,2}} - \frac{0,074X_{crit}}{Re_{crit}^{0,2}}$$

Que reordenada torna-se apenas:

$$C_f = \frac{0,074c}{Re^{0,2}} - \frac{1700}{Re} \quad (EQ. 5.67)$$

Para $Re_{crit} = 5 \cdot 10^5$

$$Re = \frac{\rho \cdot V_o \cdot c}{\mu}$$

Na (Figura 10) temos uma ilustração deste efeito:

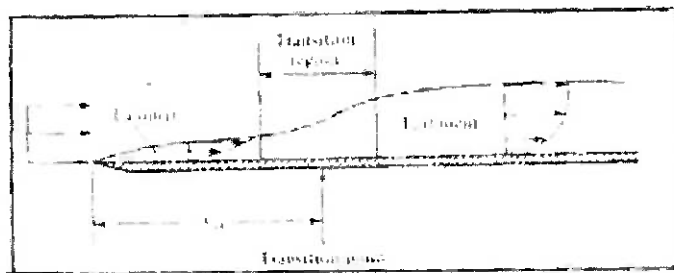


Figura 10: ESCOAMENTO REAL PARA A CAMADA LIMITE EM UMA PLACA PLANA

Sendo o COEFICIENTE DE ARRASTO definido segundo a equação e o coeficiente de atrito segundo a equação temos ainda que:

$$D = \tau \cdot S = \tau \cdot c \cdot b. \Rightarrow D = \tau \cdot c$$

portanto, o coeficiente de arrasto de fricção será:

$$C_{df} = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho_o V_o^2} = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_o V_o^2 c} = C_f$$

Assim sendo, o COEFICIENTE DE ARRASTO TOTAL DE UMA CHAPA PLANA SUBMETIDA A UM ÂNGULO DE ATAQUE, pode ser modelado por: (EQ. 5.68)

Projetando a tensão de cisalhamento em ambos os lados da placa paralelamente ao escoamento, chega-se finalmente à expressão analítica do coeficiente de arrasto:

$$C_d = C_{df} + C_{dp} = C_f + \sin^2(\alpha) \quad (EQ. 5.68)$$

Projetando a tensão de cisalhamento em ambos os lados da placa paralelamente ao escoamento, chega-se finalmente à expressão analítica do coeficiente de arrasto :

$$C_a = \sin^2(\alpha) + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(\frac{0,074c}{\text{Rec}^{0,2}} - \frac{1700}{\text{Rec}} \right) \quad (\text{EQ. 5.69})$$

Note que se o ângulo de ataque for muito pequeno, C_d é proporcional ao quadrado deste, o que parece coerente já que a curva $C_d \times \text{ALFA}$ é freqüentemente modelada por uma parábola. Observa-se que o efeito da camada limite prevalece para ângulos de ataque pequenos. A medida que ALFA aumenta, o arrasto de pressão aumenta muito além do arrasto viscoso. Chegará um ângulo fonde o gradiente de pressão ao longo do corpo é tão grande que descolará a camada limite e ocorrerá portanto o STALL.

Lembramos novamente que a aproximação acima é coerente e verificável experimentalmente para corpos cuja a espessura é até cerca de Dez vezes menor que seu comprimento ou corda. (BASTA OBSERVAR A SEMELHANÇA ENTRE AS CURVAS DE ARRASTO PARA OS AEROFÓLIOS NACA).

CÁLCULO DE MOMENTO DE “PITCH”

Além da sustentação e do arrasto, como vimos, existe a grandeza denominada “MOMENTO DE PITCH” atuando no aerofólio para o caso de escoamento bi-dimensional, gerado pela diferença de posição entre o CG e o CP deste.

Como vimos na SECÇÃO II, este momento pode ser determinado simplesmente pelo produto da FORÇA DE SUSTENTAÇÃO obtida pela ordenada do centro de pressão. Assim, na verdade, basta determinarmos o centro de pressão do aerofólio, para podermos calcular este momento.

Para determinarmos a posição do centro de pressão, basta como sempre dividir a somatória de momentos em torno da origem (tomada no ponto mais próximo do bordo de ataque) pela somatória de forças atuantes da superfície do aerofólio. Como vimos, neste podem atuar dois tipos de esforços como resultado da interação com o fluido: tensões de cisalhamento, paralelas à superfície e pressões normais à superfície.

Apenas para efeito de cálculo de momentos, podemos considerar que a ordem de grandeza da tensão de cisalhamento local atuando em um elemento de área é muito menor que a pressão atuando sobre este. Além do mais, no caso de aerofólios, o braço de momento entre o ponto de aplicação da força provocada pela tensão de cisalhamento e a origem é muito pequeno devido à espessura delgada do aerofólio. Assim, consideramos apenas a COMPONENTE PERPENDICULAR à direção do escoamento ao longo da pressão em um ponto para efeito de cálculo do centro de pressão. (VER FIGURA 11)

Deste modo desprezamos os efeitos da tensão de cisalhamento ao longo da superfície do aerofólio, só nos preocupando com a componente da pressão perpendicular ao eixo x.

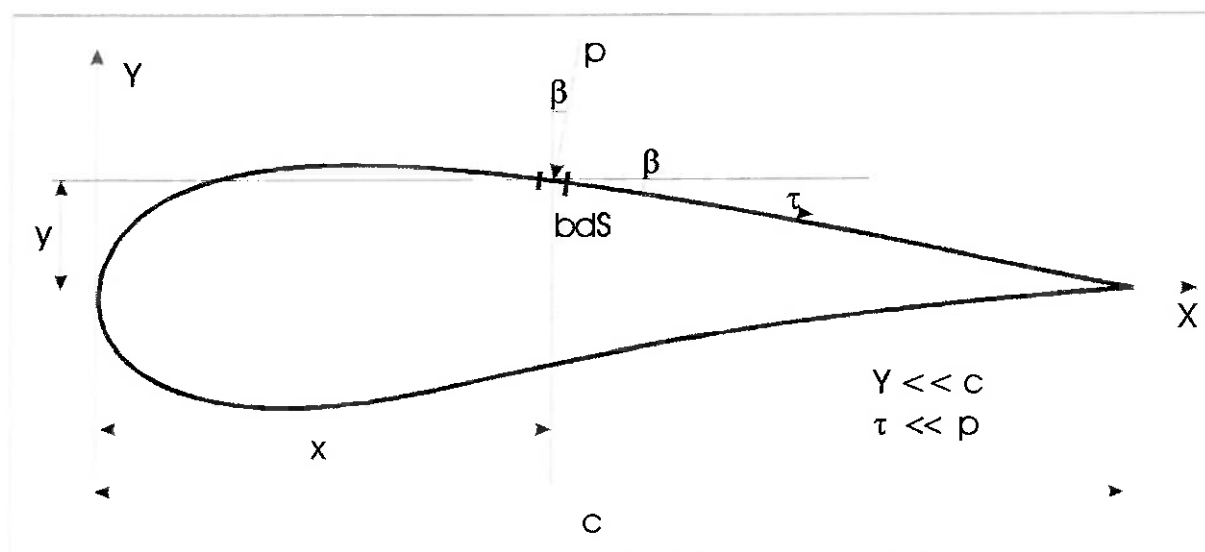


Figura 11: ELEMENTOS PARA O CÁLCULO DO CENTRO DE PRESSÃO

Desta forma, o momento em relação à origem, da força normal originada pela pressão em um ponto da superfície será (apenas):

$$dM = p.(x.\cos(\theta) - y.\sin(\theta)).Ds \quad (EQ. 5.70)$$

onde: (θ) = Ângulo que p faz com a direção X (ou Y)

Sendo $X_{cp} = M/F$, temos, integrando dF e dM :

$$X_{cp} = \frac{\int (X \cdot p \cdot \cos(\theta) - Y \cdot p \cdot \sin(\theta)) dS}{\int (p \cdot \cos(\theta) - p \cdot \sin(\theta)) dS} \quad (EQ. 5.71)$$

Basta portanto sabermos a distribuição de p ao longo da superfície do aerofólio.

Como definido no capítulo III, p pode ser escrito em termos de C_p local como:

$$p = p_0 + c_p \cdot q$$

Onde $c_p = 1 - (v/v_0)^2$, que é função da velocidade em cada ponto.

Considere agora uma curva retangular fechando-se sobre uma superfície qualquer, que contenha uma malha de vórtices de comprimento dS (Figura 12)

Sejam as componentes de velocidades tangenciais na superfície superior e inferior da curva retangular u_1 e u_2 , respectivamente e as componentes de velocidade tangenciais nos lados direito e esquerdo da curva v_1 e v_2 respectivamente. O retângulo tem altura dn . Da definição de circulação em torno da superfície temos:

$$d\Gamma = - (v_2 \cdot dn - u_1 \cdot ds - v_1 \cdot dn + u_2 \cdot ds) = \gamma \cdot ds \quad (EQ. 5.72)$$

Se $dn \rightarrow 0$, no limite u_1 e u_2 tornam-se velocidade tangenciais a malha de vórtices e portanto:

$$y = u_1 - u_2$$

(EQ. 5.73)

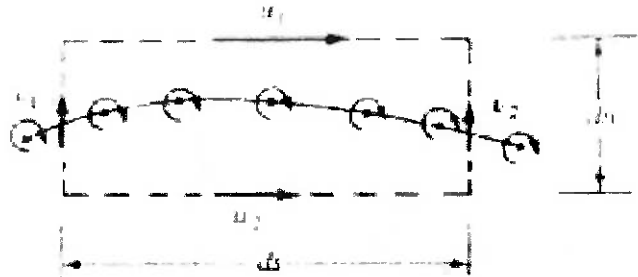


Figura 12: VELOCIDADES TANGENCIAIS ATRAVÉS DE UMA MALHA DE VÓRTICES DE COMPRIMENTO INFINITESIMAL

No caso do aerofólio, $u_2 = 0$, pois o bordo interior do retângulo estaria fisicamente dentro do aerofólio onde não há escoamento, logo:

A VELOCIDADE TANGENCIAL LOCAL EM UM PONTO TEM VALOR IDÊNTICO, NO LIMITE AO VALOR DA CIRCULAÇÃO POR UNIDADE DE COMPRIMENTO LOCAL.

Esta conclusão é muito importante, pois se utilizarmos o método dos painéis para determinar os valores locais da circulação por unidade de comprimento, estaremos determinando o valor da velocidade tangencial média em cada painel e portanto o valor de C_p .

$$C_{pj} = 1 - \left(\frac{V_j}{V_o} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\gamma_j}{V_o} \right)^2 \quad (\text{EQ. 5.74})$$

e assim, $P_j = p_0 + C_{pj} \cdot q$

Discretizando a equação 5.71 para n painéis finalmente podemos calcular XCP numericamente como:

$$X_{cp} = \frac{\sum \left(p_o + \left(1 - \left(\frac{y_j}{V_o} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_o^2 \right) \right) \cdot (X_j \cdot \cos(\theta_j) - Y_j \cdot \sin(\theta_j)) \cdot S_j}{\sum \left(p_o + \left(\frac{y_j}{V_o} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_o^2 \right) \cdot (\cos(\theta_j) - \sin(\theta_j)) \cdot S_j}$$

É interessante que o centro de pressão sempre situa-se próximo a região de 25% do comprimento da corda do aerofólio, por mais diferente que seja o valor da sustentação gerada (EXCETO EM CASO DE SUSTENTAÇÃO NULA, POIS $XCP \rightarrow -\infty$). É por isso que vários autores preferem tomar como origem dos momentos a posição $c/4$ e não a origem convencional no bordo de ataque: além de ser conveniente matematicamente, pois com $L = 0$ x_{cp} não tende a $-\infty$, a posição deste é muito melhor expressa em termos das vibrações em relação a $c/4$.

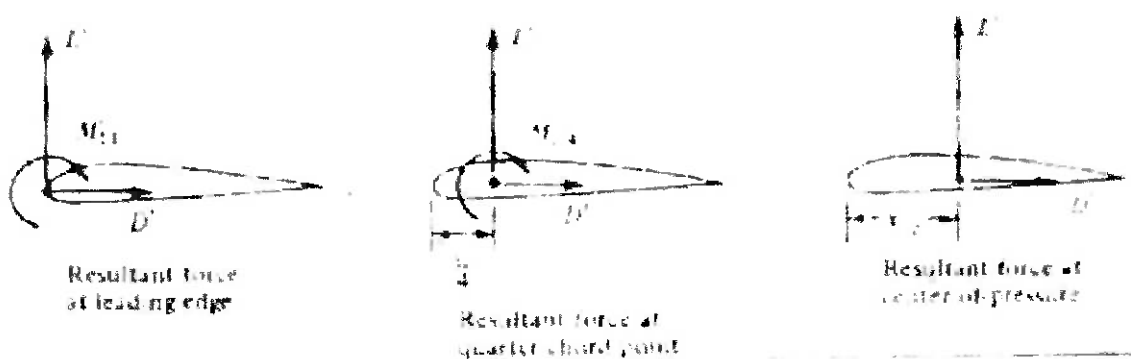


Figura 13: MOMENTOS AERODINÂMICOS

Pela figura 13 temos em relação ao quarto de corda:

$$Mc/4 = M + I \cdot (c/4)$$

e portanto:

$$Cm(c/4) = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho_o V_o^2 c^2} \left[\left(\frac{c}{4} - X_{cp} \right) L \right] = \frac{\rho_o V_o}{\frac{1}{2} \rho_o V_o^2 c^2} \left[\left(\frac{c}{4} - X_{cp} \right) \sum_{j=1}^n y_j \cdot S_j \right] \quad (EQ. 5,77)$$

Desenvolvidos os métodos matemáticos para o escoamento bi-dimensional em aerofólios, passemos agora a análise do escoamento tridimensional em asas finitas.

VI) CÁLCULO DE SUSTENTAÇÃO, ARRASTO E MOMENTOS EM ASAS FINITAS:

1) INTRODUÇÃO:

O escoamento bi-dimensional em torno de uma secção de asa pode ser determinado utilizando-se da função potencial de velocidades e da teoria da camada limite para chapas planas. A partir daí podemos determinar os coeficientes C_l , C_d , C_m e C_p como comportamento locais, em termos do ângulo de ataque α .

Entretanto, se considerarmos este perfil como uma “fatia” de asa, não poderemos simplesmente utilizar-se dos mesmos coeficientes para calcular L , D e M . É errado pensar que, multiplicando L , D e M pela envergadura da asa obteremos L , D e M reais para a asa. Isto se deve principalmente devido às condições de contorno na ponta da asa, pois onde esta termina não há a geração de qualquer esforço aerodinâmico já que lá não existe asa.

A primeira conclusão importante é a deformação do perfil de sustentações ao longo da envergadura da asa. Não se pode considerar que a sustentação se comporte de maneira uniforme ao longo desta, já que nas pontas não existe a geração de sustentação.

Intuitivamente podemos deduzir que a sustentação deva crescer em direção à raiz da asa, ou corda central, começando em zero e terminando num valor bem próximo ao previsto pelo tipo aerofólio que compõe esta asa (SUPONDO QUE É UTILIZADO O MESMO TIPO DE AEROFÓLIO AO LONGO DE TODA A ENVERGADURA).

Se considerarmos que a asa seja do tipo SEMI-CANTLEVER, ou seja, que a asa seja inteiriça e nenhuma fuselagem divida esta em duas, o perfil de sustentação se assemelhará muito á uma eclipse, começando com zero nas pontas e atingindo o valor máximo na corda central.

Em asas divididas por uma fuselagem (CANTLEVER), a sustentação atinge o máximo até bem próximo da raiz e apresenta uma suave queda até a linha central da fuselagem. Isso se deve ao fato da fuselagem interferir negativamente no perfil de sustentações, deformando-o, pois o gradiente de pressão ao longo de fuselagem é completamente diferente do provocado pelo aerofólio. A fuselagem induz muito pouca sustentação e funciona como condição de contorno adversa para o escoamento, aumentando inclusive o arrasto de fricção e de forma. (VER FIG. 14)

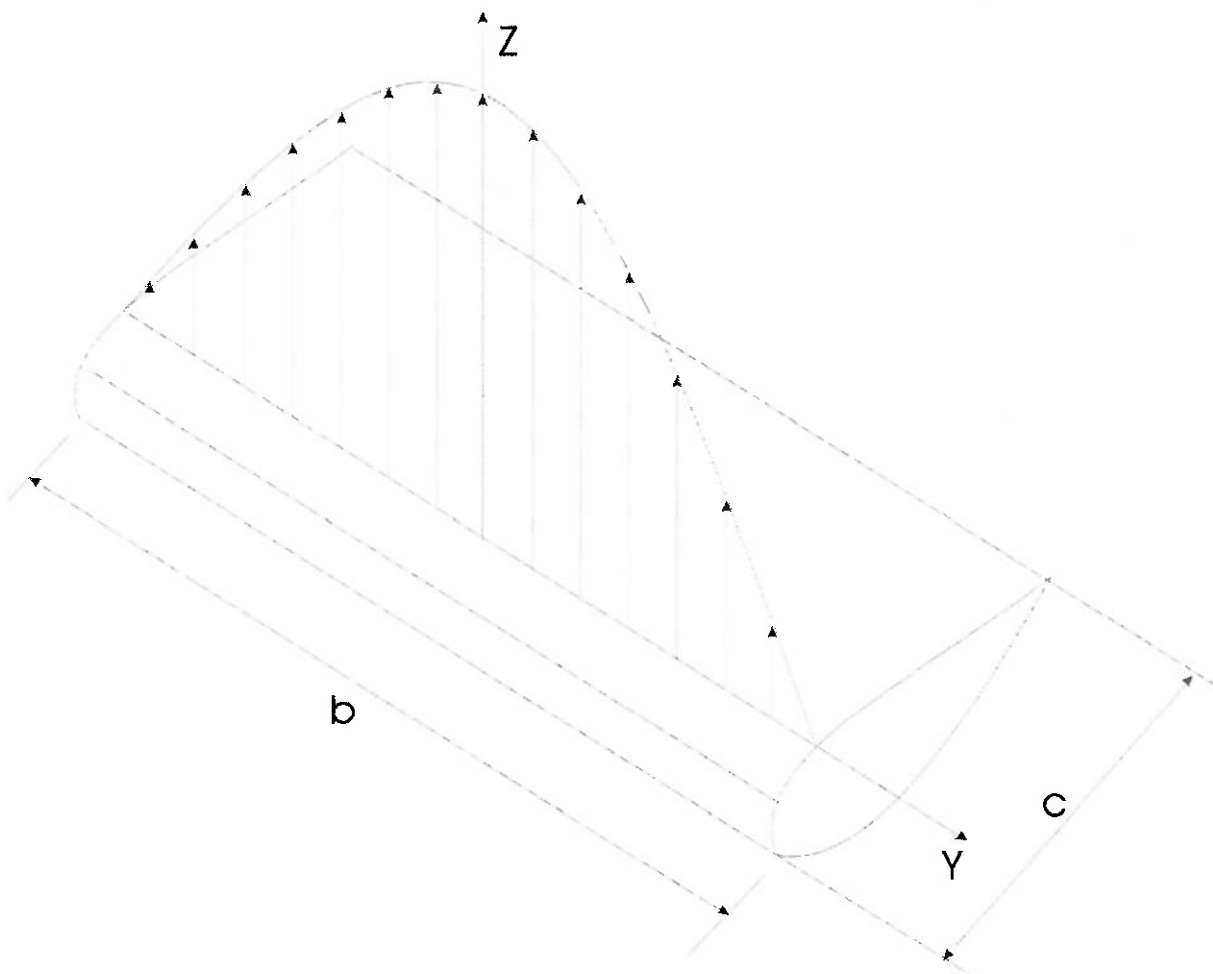


Figura 14: DISTRIBUIÇÃO DA SUSTENTAÇÃO EM UMA ASA FINITA AO LONGO DE SUA ENVERGADURA (Asa semi-cantlever)

Vejamos os outros efeitos de uma asa finita pode induzir no escoamento.

2) “DOWN WASH” e ARRASTO INDUZIDO:

Como vimos, o mecanismo para a geração de sustentação em uma asa se deve ao fato de existir um gradiente de pressão estática entre o intradorso e o extradorso, provocado pela maior aceleração do fluido no extradorso, que geralmente apresenta maior curvatura que o intradorso. Portanto existe ALTA PRESSÃO ESTÁTICA NO INTRADORSO E BAIXA PRESSÃO ESTÁTICA NO EXTRADORSO.

Devido à esta diferença de pressão, na ponta da asa o fluido do intradorso tenta subir ao extradorso, buscando equilíbrio de pressões. Um vórtice então é formado na ponta da asa (VÓRTICE INDUZIDO), cujo sentido de rotação sempre segue do intradorso para o extradorso. Este vórtice influencia nas linhas de corrente no extradorso distorcendo-as para a direção da raiz e no intradorso, distorcendo-as em direção à ponta. Surge portanto também um FLUXO TRANSVERSO no escoamento, formado pela componente na direção da envergadura (y) da velocidade do escoamento ao longo das linhas de corrente. (VER FIG. 15)

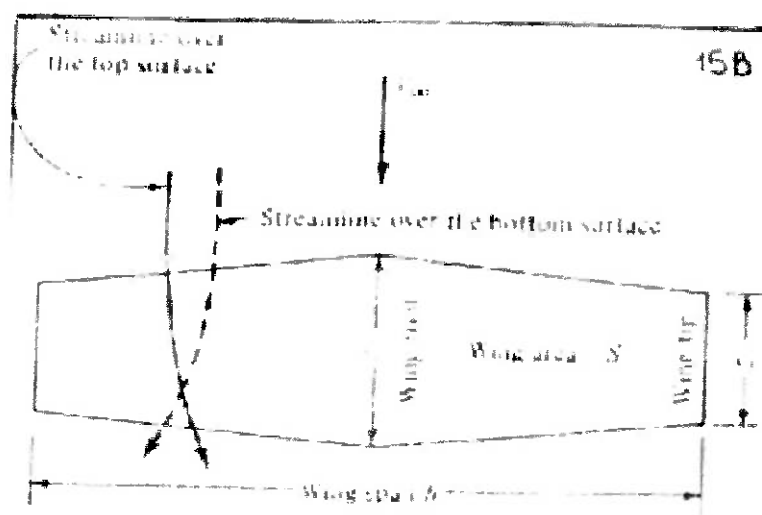


Figura 15: VÓRTICES INDUZIDOS E DISTORÇÃO DAS LINHAS DE CORRENTE.

Estes vórtices formam uma ESTEIRA DE TURBULÊNCIA que acompanha a aeronave em seu trajeto, já que o vórtice formado faz parte de um FILAMENTO DE VÓRTICES. Tal esteira já foi responsável por muitos incidentes aeronáuticos envolvendo aeronaves de pequeno e grande porte, provocando inclusive quedas, pois a intensidade dos vórtices aumenta muito para pequenos acréscimos de envergadura. Mais á frente veremos como é deduzida esta relação.

Além da esteira de turbulência, os vórtices induzidos também provocam outro fenômeno importante: o “DOWN WASH”.

Como efeito no escoamento ao redor da asa, os vórtices induzidos influenciam no fluido que abandona o bordo de fuga, de modo a criar uma componente vertical da velocidade na direção -Z, forçando o fluido para baixo. Isso ocorre devido a baixa pressão induzida em cada esteira de vórtice, que tende a “sugar” todo o ar a seu redor do centro da asa para fora e a seguir ascendendo em direção ao extradorso. Este componente de velocidade é o “DOWN WASH”, simbolizado por W . (VER FIG. 16)

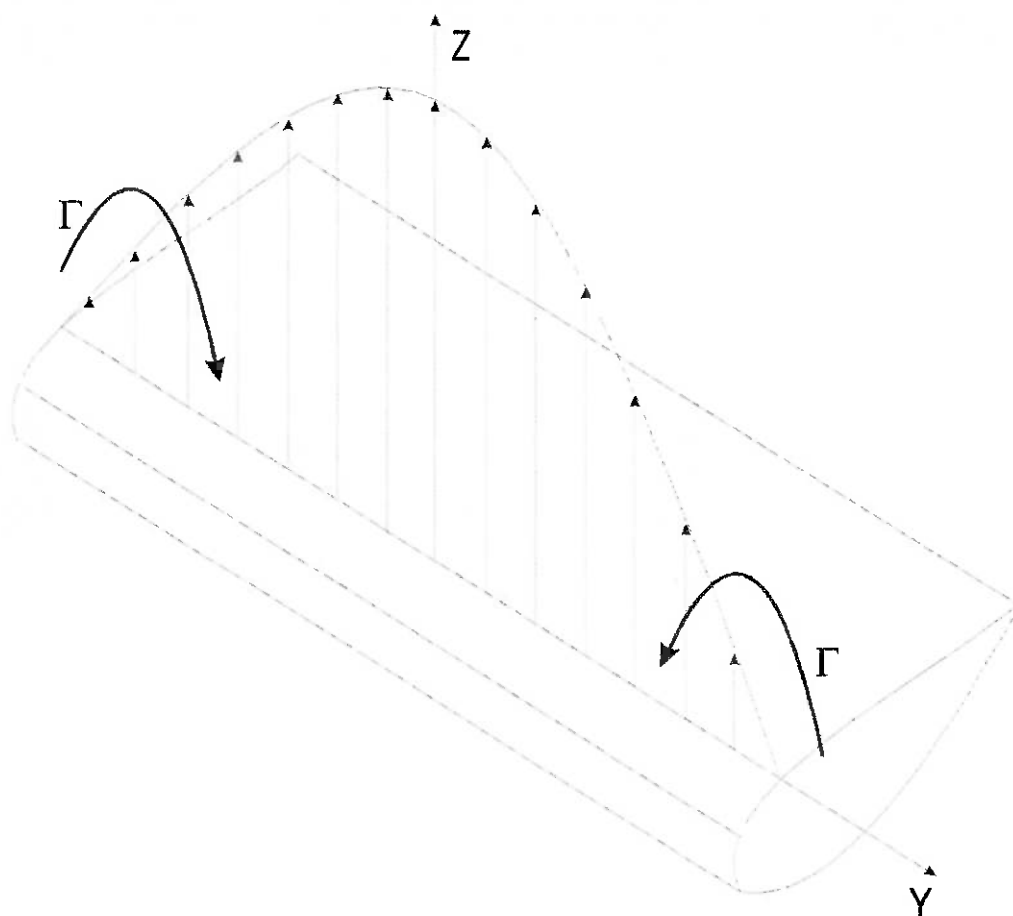


Figura 16: DOWN WASH INDUZIDO EM UMA ASA

A combinação de W com a velocidade ao longe v_0 , provoca uma variação de direção e intensidade do vento relativo que incidirá sobre a asa, de forma que a VELOCIDADE DE ESCOAMENTO EFETIVA que provocará os esforços aerodinâmicos será a SOM VETORIAL de W com v_0 . Além disso, devido a esta composição de velocidades, o ângulo de ataque geométrico será decrementado em:

$$\alpha_l = \arctan (w/v_0)$$

Que é chamado ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO.

Assim, tudo se passa como se a asa estivesse voando com o novo ângulo de ataque:

$$\alpha_{ef} = \alpha - \alpha_i$$

Veja, na figura 17, como isto acontece:

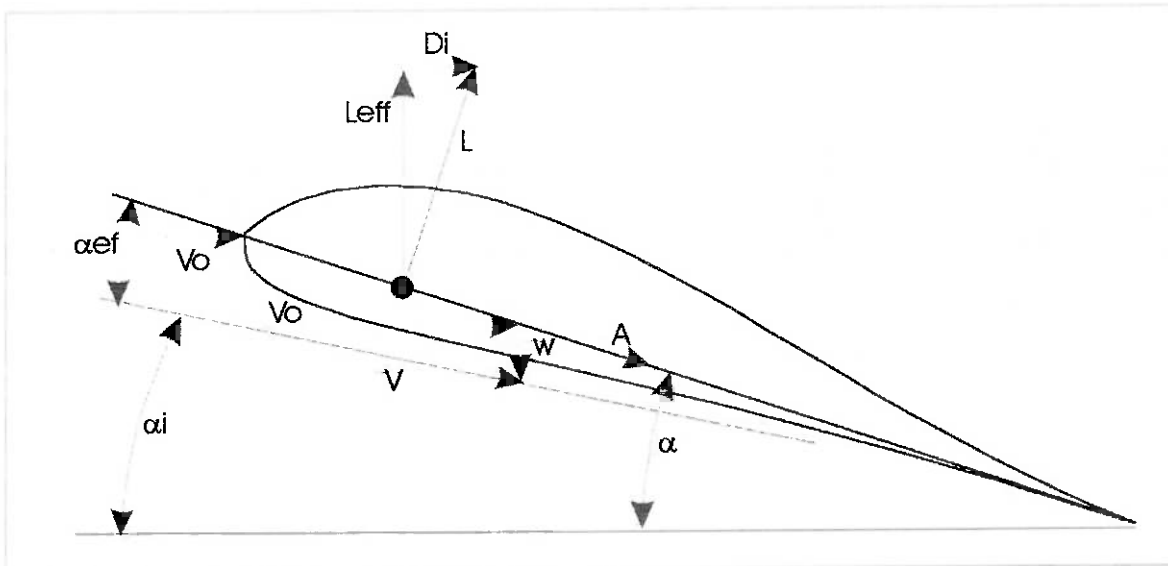


Figura 17: EFEITO DO “DOWN WASH” NO ÂNGULO DE ATAQUE

O ângulo entre a corda e o vento relativo é o ÂNGULO DE ATAQUE GEOMÉTRICO (ALFA). O vento relativo local V_r é deslocado em relação a v_0 de um ângulo de ataque induzido α_i provocado pelo DOWN WASH. O ÂNGULO DE ATAQUE aerodinâmico (α_{eff}) será, na prática, a diferença entre o ÂNGULO DE ATAQUE GEOMÉTRICO e o ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO.

Pela própria definição de SUSTENTAÇÃO, L será sempre perpendicular ao vento relativo, em nosso caso, o vento relativo EFETIVO cuja magnitude é a SOMA VETORIAL DE w E V_0 cuja direção é α_{eff} . Consequentemente haverá uma componente desta “nova” sustentação na direção de v_0 e outra perpendicular a v_0 . A componente vertical é a SUSTENTAÇÃO EFETIVA DA ASA e a componente horizontal é o chamado ARRASTO INDUZIDO (D_i).

Portanto, com o aparecimento do DOWN WASH, dois fenômenos acontecem:

(1) A DIMINUIÇÃO DO ÂNGULO DE ATAQUE é conseqüente da DIMINUIÇÃO DA SUSTENTAÇÃO EFETIVA.

(2) O APARECIMENTO DO ARRASTO INDUZIDO, aumentando o valor de C_d em relação ao do aerofólio.

Definitivamente pode-se concluir que os valores de C_l e C_d não são iguais, no caso de uma asa finita, aos previstos para o mesmo aerofólio utilizado nesta asa, provocados principalmente pela descontinuidade na ponta da asa, que faz surgir vórtices induzidos.

Para podermos avaliar os valores corretos de C_l e C_d , utilizaremos mais algumas ferramentas matemáticas. Para isto desenvolveremos um método de cálculo utilizando-se da LINHA DE SUSTENTAÇÃO DE PRANDTL baseada na TEORIA DOS FILAMENTOS DE VÓRTICES.

Apenas por questão de notação, utilizaremos letras MAIÚSCULAS para se referir aos coeficientes aerodinâmicos de uma asa (C_L , C_D , C_M , etc..) e letras minúsculas para se referir a coeficientes aerodinâmicos de AEROFÓLIOS (c_l , c_d , c_m ,...).

CÁLCULO DA SUSTENTAÇÃO EM ASAS FINITAS

Para iniciar a análise da SUSTENTAÇÃO EM ASAS FINITAS, é necessário introduzir outras ferramentas matemáticas.

3) LEI DE BIOT-SAVAT APLICADA A FILAMENTO DE VÓRTICES:

Dados: um vórtice com intensidade Γ , cujo filamento estende-se de $-\infty$ a $+\infty$ no espaço, e um ponto P situado em qualquer local fora deste filamento.

O filamento induzirá um campo de velocidades ao longo de todo o espaço inclusive localmente no ponto P . Considerando o comprimento infinitesimal dl tomado sobre o filamento e o raio vetor r , orientado do ponto médio de dl até o ponto P , a velocidade induzida em P pelo filamento de vórtices com intensidade Γ será:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (\text{EQ. 6.1})$$

Que, analogamente às teorias do eletromagnetismo, denomina-se LEI DE BIOT-SAVAT.

Integrando a equação acima temos:

$$\vec{V} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Temos finalmente que: (tomando v em módulo)

$$|V| = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{r^2} \cdot dl = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot h} \quad (\text{EQ. 6.2})$$

onde V é perp. com h

O que coincide com o resultado obtido pela teoria do VÓRTICE IDEAL.

Observe que a velocidade induzida é constante em uma dada distância do filamento ao longo de todo o espaço. Esta conclusão é muito importante para o desenvolvimento da teoria da LINHA DE SUSTENTAÇÃO.

4) LINHA DE SUSTENTAÇÃO DE PRANDTL:

Suponha que exista uma asa de forma retangular de envergadura b e corda c (a corda varia ao longo da envergadura). Esta asa produz uma sustentação L induzida por um vórtice Γ , segundo o Teorema de Kutta-Joukowski. Este vórtice está associado à asa através de um filamento que acompanha sua envergadura, entretanto, como um filamento de vórtice não pode acabar de modo finito (nas pontas da asa), quando na posição $y = b/2$ e $y = -b/2$ este continua ao longo do espaço, dobrando-se e acompanhando a direção x até o infinito. ao longo de toda a asa, o filamento de vórtice assume um formato semelhante ao de uma ferradura. A asa portanto pode ser substituída, para efeito de modelagem matemática, pelo VÓRTICE ACOPLADO (ao longo da direção y) e pelos VÓRTICES LIVRES nas duas pontas (ao longo da direção x). Note que todos estes apresentam a mesma intensidade Γ .

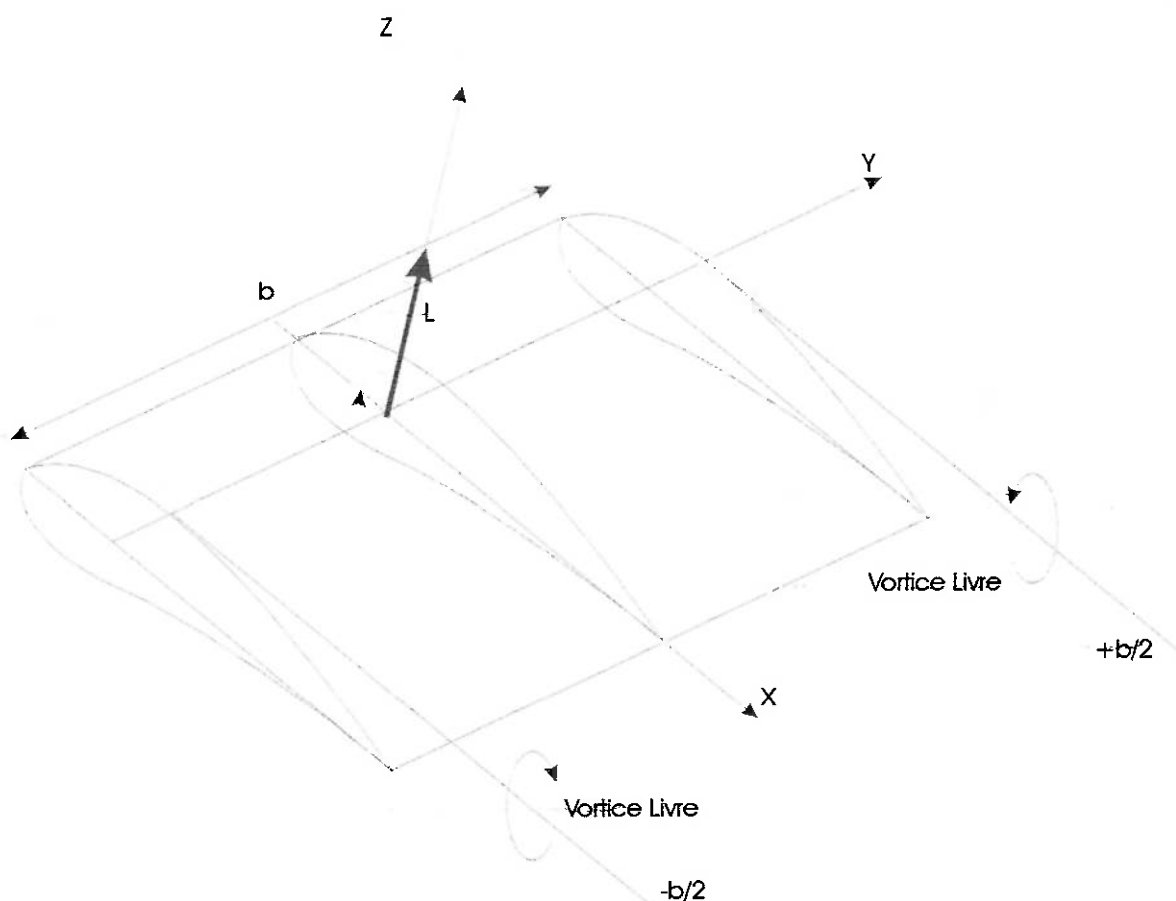


Figura 18: VÓRTICES ACOPLADOS E VÓRTICES LIVRES (HORSE SHOE VORTEX)

Vamos calcular o “DOWN WASH” induzido pelos vórtices livres, ou seja, a velocidade induzida na direção z em uma posição y qualquer entre $b/2$ e $-b/2$, utilizando-se da Lei Biot-Savart:

O vórtice direito produzirá:
$$V_d = -\frac{\Gamma}{4\pi \cdot (\frac{b}{2} + y)}$$

O vórtice esquerdo produzirá:
$$V_e = -\frac{\Gamma}{4\pi \cdot (\frac{b}{2} - y)}$$

O down wash total será portanto:

$$W(y) = -\frac{\Gamma}{4} \cdot \pi \cdot \frac{b}{\frac{b^2}{4} - y^2} \quad (\text{EQ. 6.3})$$

Note-se que nas posições $y = b/2$ e $y = -b/2$ $w = -\infty$ o que não condiz com a realidade, já que nestas posições o down wash deve assumir valor finito. Devemos portanto aprimorar este modelamento.

Consideremos não apenas um único filamento em forma de ferradura, mas inúmeros, cujos vórtices acoplados localizam-se ao longo de uma linha, denominada LINHA DE SUSTENTAÇÃO, de modo que somados totalizam a circulação total da asa. Todos estes vórtices agora influenciam conjuntamente no cálculo da velocidade induzida em um ponto de espaço. Se a cada vórtice acoplado for associado um trecho DELTA y da asa, teremos como resultado a distribuição de circulação variável ao longo da envergadura da asa onde o máximo encontra-se exatamente no ponto médio desta ($y = 0$), pois ao longo desta

ordenada a velocidade induzida recebe influência simétrica de todos aos vórtices acoplados. Veja a figura 19.

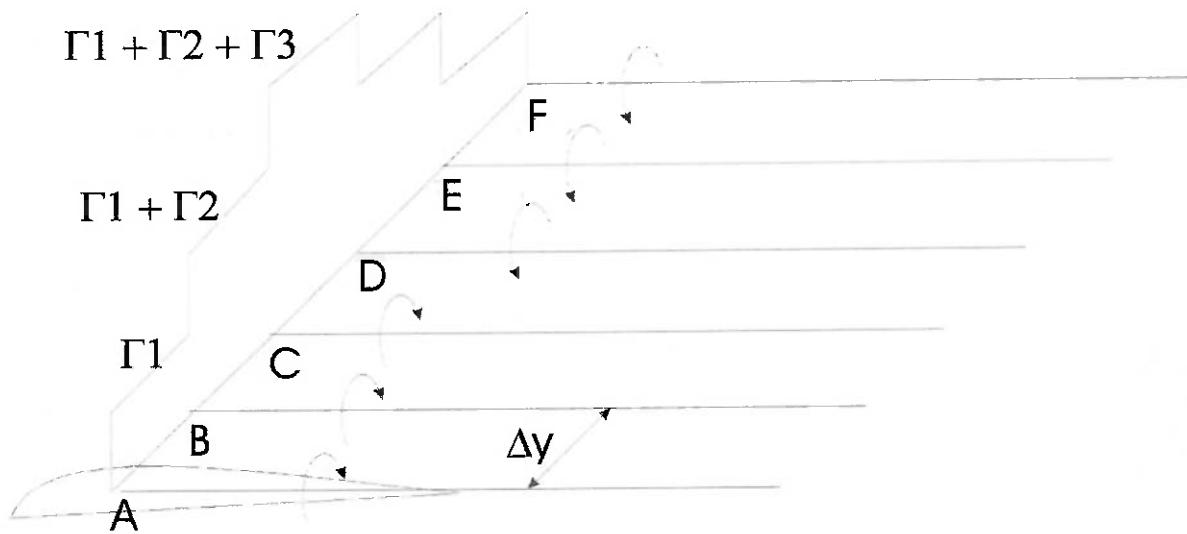


Figura 19: SUPERPOSIÇÃO DE TODOS OS VÓRTICES ACOPLADOS

Note que a influência dos vórtices ao longo de cada ordenada y é variável. Por exemplo, no trecho AB, só existe a influência do vórtice Γ_1 . No trecho BC já temos agindo conjuntamente Γ_1 e Γ_2 , e assim por diante.

Supondo agora que os comprimentos DELTA y tendam a zero, transformando-se em comprimentos elementares dy , teremos um número infinito de sistemas de vórtices em ferradura atuando ao mesmo tempo na asa.

Seja uma posição y_0 de referencia ao longo da linha de sustentação. Em y_0 , existe a influência de cada elemento de vórtice $d\Gamma$ associado a cada dy . A velocidade elementar induzida na posição y_0 será portanto:

$$dW = \frac{d\Gamma}{4\pi \cdot (y_0 - y)} = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) dy \quad (\text{EQ. 6.4})$$

Considerando que Γ varia também ao longo de y , podemos rescrever e integrar a equação acima da forma:

$$W(Y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right) dy}{(y_0 - y)} \quad (\text{EQ. 6.5})$$

Assim, para podermos calcular o “DOWN WASH” é necessário conhecermos a distribuição de Γ ao longo de y .

A partir da EQ. 6.3 podemos avaliar uma série de relações.

O ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO é dado pela relação:

$$\alpha_i = \arctan \frac{-W(y_0)}{V_0} \cong \frac{-W(y_0)}{V_0} \quad (\text{EQ. 6.6})$$

Portanto o ÂNGULO DE ATAQUE EFETIVO pode ser escrito como:

$$\alpha_{eff} = \alpha - \frac{1}{4\pi V_0} \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right) dy}{(y_0 - y)} \quad (\text{EQ. 6.7})$$

Outra relação importante é a do C1:

Localmente, na secção y_0

Sabemos que: $L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_o^2 \cdot c(y_o) \cdot Cl = \rho \cdot V_o \cdot \Gamma(y_o)$

e portanto: $Cl(y_o) = \frac{2\Gamma(y_o)}{V_o \cdot c(y_o)}$

Experimentalmente verifica-se que Cl obedece a uma relação quase linear com o ângulo de ataque do tipo:

$$c_l = a_0 \cdot (\alpha_{eff}(y_0) - \alpha(L=0)) \quad (EQ. 6.8)$$

O valor de a_0 para chapas planas é 2π . Se considerarmos que o aerofólio utilizado tem espessura pequena (no máximo $0.1c$), como é o caso de 90% dos aerofólios utilizados em aeronaves subsônicas (perfis NACA por exemplo), podemos considerar e verificar experimentalmente que o valor de a_0 é muito próximo de 2π ($a_0 \cong 6,3$).

Assim, juntando as equações (6.6), (6.7) e (6.8), chegamos a EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA LINHA DE SUSTENTAÇÃO:

$$\alpha(y_o) = \frac{\Gamma(y_o)}{\pi \cdot V_o \cdot c(y_o)} + \alpha_o + \frac{1}{4\pi V_o} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) \frac{dy}{(y_o - y)} \quad (EQ. 6.9)$$

Note que a sua única incógnita é a distribuição $\Gamma(y)$, porém esta se encontra ainda sob forma algébrica imprópria. Devemos portanto desenvolver um método que permita seu

cálculo de maneira direta ou resolvê-la numericamente. Se conhecermos $\Gamma(y)$, teremos também:

$$L = \rho \alpha V_o \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) dy = \rho \alpha V_o \cdot \sum_{i=0}^n \Gamma(i) \Delta y \quad (EQ. 6,10)$$

$$Cl = \frac{L}{q \cdot S} = \frac{2}{V_o \cdot S} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2}{V_o \cdot S} \cdot \sum_{i=0}^n \Gamma(i) \Delta y \quad (EQ. 6,11)$$

e também o ARRASTO INDUZIDO:

$$Di = \int_{-b/2}^{+b/2} L(y) \cdot \alpha i(y) \cdot dy = \rho V_o \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) \cdot \alpha i(y) \cdot dy \quad (EQ. 6,12)$$

$$CDi = \frac{Di}{q \cdot S} = \frac{2}{V_o \cdot S} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} L(y) \cdot \alpha i(y) \cdot dy \quad (EQ. 6,13)$$

A primeira aproximação para resolver a equação da linha de sustentação seria aproximar-se $\Gamma(y)$ por um perfil conhecido e a partir daí obter-se as características geométricas da asa. Para efeito de ilustração consideraremos inicialmente uma distribuição ELIPTICA da CIRCULAÇÃO (ou SUSTENTAÇÃO), pois o perfil suposto assemelha-se muito com esta curva. Os resultados obtidos com isto são surpreendentes e servirão como base comparativa para desenvolvermos a teoria genérica da asa.

A seguir, faremos o caminho inverso, dada uma geometria (ENVERGADURA, PERFIL UTILIZADO, TORÇÃO E CORDA), calcularemos o perfil de sustentações através de aproximações em séries de Fourier, pois o aspecto da distribuição também lembra uma senóide. Será com base nesta que desenvolveremos um algoritmo numérico para resolver uma asa finita.

5) DISTRIBUIÇÃO ELÍPTICA DE SUSTENTAÇÃO/ CIRCULAÇÃO:

Considere um carregamento elíptico de circulação ao longo de uma asa com envergadura b e com corda $c=c(y)$ variável ao longo desta, sendo que:

a) Nas pontas, onde $y = b/2$ e $y = -b/2 \Rightarrow \Gamma(y) = 0$

b) No ponto médio, onde $y=0 \Rightarrow \Gamma(y) = \Gamma_0$

Γ_0 é aproximadamente a circulação prevista pelo aerofólio em escoamento bi-dimensional, já que nesta posição a influência dos vórtices de ambas as extremidades se anula, dada a simetria da asa.

logo, $\Gamma(y)$ obedece à seguinte equação:

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{4 \cdot y^2}{b^2}} \quad (\text{EQ. 6.13})$$

e portanto

$$L(y) = \rho \cdot V_o \cdot \Gamma_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{4 \cdot y^2}{b^2}} \quad (\text{EQ. 6.14})$$

Integrando a equação (6.14) podemos calcular a SUSTENTAÇÃO TOTAL gerada pela asa.

$$L = \rho_o V_o \Gamma_o \int_{-b/2}^{+b/2} \sqrt{1 - \frac{4y^2}{b^2}} dy \quad (EQ. 6.15)$$

Derivando $\Gamma(y)$ em relação a y podemos calcular em seguida o “DOWN WASH” induzido em cada ponto y_0 ao longo da linha de sustentação:

$$W(y_0) = \frac{\Gamma_o}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{+b/2} \sqrt{\frac{y}{(1 - \frac{4y^2}{b^2})(y_0 - y)}} dy$$

Para resolver esta integral é necessário fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$y = \frac{b}{2} \cos(\theta) \quad \text{onde} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Substituindo na equação acima:

$$W(\theta_0) = \frac{\Gamma_o}{2\pi b} \int_0^\pi \sqrt{\frac{\cos(\theta)}{(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta$$

De qualquer tabela de integrais obtemos:

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{\cos(\theta)}{(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}} d\theta = 0$$

E finalmente calcula-se:

$$W(\theta_0) = W(y_0) = CTE = -\frac{\Gamma_0}{2b} \quad (EQ. 6.16)$$

Temos ,pois, um resultado surpreendente:

O DOWN WASH É CONSTANTE PARA UMA DISTRIBUIÇÃO ELÍPTICA DE SUSTENTAÇÃO.

Note que w varia inversamente com a envergadura da asa, ou seja, quanto mais longa esta for, menor a intensidade do Down Wash.

Como vimos, o down wash é diretamente proporcional ao arrasto induzido e portanto, o ARRASTO INDUZIDO TENDE A ZERO COM O AUMENTO DA ENVERGADURA DE UMA ASA. Fisicamente observamos que quanto mais longe as pontas estiverem da secção média ($y = 0$), menor a influência dos vórtices livres no perfil de circulações e portanto menos distorcidos este ficará, se aproximando cada vez mais de uma distribuição uniforme de sustentações. Se $L = cte$ ao longo de toda a asa podemos concluir que, para asas de ENVERGADURA INFINITA (muito grande):

$$L \rightarrow L \cdot b \text{ e portanto: } CL \rightarrow CI$$

Também pela teoria de LINHA DE SUSTENTAÇÃO de Prandtl, podemos observar que w cresce em direção as pontas de uma asa genérica, tendendo a valores bem grandes, pois a medida que nos aproximamos destas a influência dos vórtices livres é mais sentida. Se numa

asa elíptica o DOWN WASH é CONSTANTE, logo podemos concluir que este só pode ser mínimo neste tipo de carregamento.

Sendo o arrasto induzido local diretamente proporcional ao DOWN WASH local, concluímos que este é o MÍNIMO POSSÍVEL para uma asa elíptica com uma dada envergadura b .

Pode-se obter outros resultados, tais como:

$$\alpha_i = -\frac{W}{V_o} = \frac{\Gamma_o}{2.b.V_o} \quad (\text{EQ. 6.17})$$

$$L = \rho_o.V_o.\Gamma_o.\int_0^{\pi} \sin^2(\theta).d\theta = \rho_o.V_o.\Gamma_o.b.\frac{\pi}{4} \quad (\text{EQ. 6.18})$$

isolando Γ_o temos:

$$\Gamma_o = \frac{4.L}{\rho_o.V_o.b.\pi} = \frac{2.V_o.S.Cl}{b.\pi} \quad (\text{EQ. 6.19})$$

Substituindo na equação (6.17) temos:

$$\alpha_i = \frac{2.V_o.S.Cl}{b.\pi} \cdot \frac{1}{2.b.V_o} = \frac{S.Cl}{\pi.b^2} = \frac{Cl}{\pi.AR}, \text{ onde } AR=b^2/S \quad (\text{EQ. 6.20})$$

Calculando o arrasto induzido temos:

$$CDI = \frac{2.\alpha i}{V_o.S} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y).dy = \frac{2.\alpha i.\Gamma_o.b}{V_o.S.2} \int_0^\pi \sin^2(\theta).d\theta = \frac{\pi.\alpha i.b.\Gamma_o}{2.V_o.S} \quad (EQ. 6.21)$$

Juntando as equações (6.20) e (6.21) finalmente chega-se a importante equação:

$$CDI = \frac{CL^2}{\pi.AR} \quad (EQ. 6.22)$$

O que comprova que o ARRASTO INDUZIDO ESTÁ DIRETAMENTE RELACIONADO COM A SUSTENTAÇÃO DA ASA. Como CD_i cresce com o quadrado de CL , em situações que requeiram alto valor de CL , tais como em decolagem ou no PRÉ STALL, necessita-se portanto de grande potência para vencer-se o altíssimo arrasto induzido. Para asas finitas, este é o principal responsável pelo arrasto total desta, contribuindo com cerca de 80% do arrasto total.

Pode-se observar também que CD_i VARIA COM O INVERSO DA RAZÃO DE ASPECTO da asa. Assim quanto mais alongada esta for, ou seja, quanto maior sua envergadura em relação à corda (ou o quadrado da envergadura em relação a Área) menor será o arrasto induzido e portanto menor a potência necessária para se manter um vôo reto horizontal. É caso de planadores, onde as asas são muito longas e finas (com elevada razão de aspecto), que precisam do máximo de sustentação para o mínimo arrasto possível para poder se manter no ar maior tempo, já que não se dispõe de qualquer tipo de propulsão. É claro que se paga um preço por este artifício, já que os esforços estruturais também se acentuam na raiz da asa devido ao aumento da envergadura, sobretudo os momentos de flexão e torção, necessitando de um maior reforço nas Longarinas e portanto um possível aumento de peso.

Por último, vamos verificar outra propriedade importante:

Considere uma asa onde não haja torção geométrica, ou seja, o ângulo de ataque é constante ao longo da envergadura, e também não haja torção aerodinâmica, ou seja, a asa apresenta rigidez infinita de modo que os esforços aerodinâmicos não provoquem torções e portanto variações indesejáveis no ângulo de ataque em cada secção. Assim, o ÂNGULO DE ATAQUE INDUZIDO PERMANECE CONSTANTE EM CADA SECÇÃO, e portanto também o ângulo de ataque efetivo e o c_l local. Assim, podemos dizer que:

$$L(y) = q_0 \cdot c(y) \cdot l \quad \text{onde:} \quad q_0 = (1/2) \rho V_0^2$$

Sendo q_0 também constante, para que a distribuição de sustentações seja elíptica, é necessário apenas que o COMPRIMENTO DA CORDA VARIE DE FORMA ELÍPTICA AO LONGO DA ASA, ou seja:

ASAS COM FORMA ELÍPTICA APRESENTAM O MENOR ARRASTO INDUZIDO em relação a outro formato qualquer que gere a mesma sustentação.

Até a Segunda Guerra Mundial, onde as velocidades atingidas pelas aeronaves não alcançavam níveis onde a compressibilidade do ar interferia na geração da sustentação, o principal problema dos engenheiros era minimizar o arrasto induzido. A solução foi realmente produzir aeronaves com asas de formato elíptico, tanto civis como militares. Como exemplo tem-se o Caça Inglês Spitfire, que tornou-se muito ágil devido a esta característica. A aeronave comercial QUADRICEPTOR CONSTELLATION foi outro exemplo, que ganhou muitas milhas de autonomia e uma economia de combustível incrível em vôos internacionais devido a boa redução de arrasto induzido.

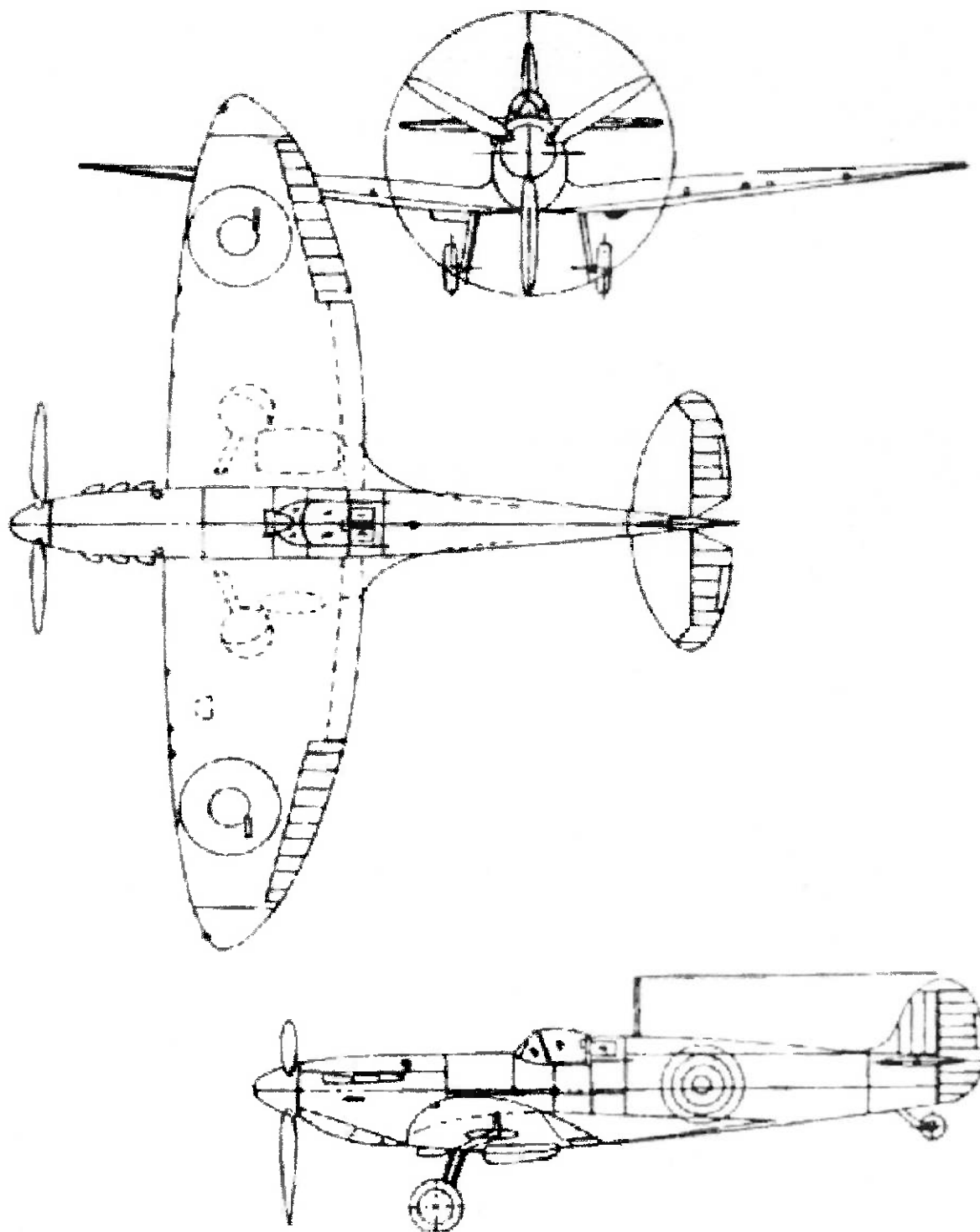


Figura 23: SPITFIRE: AERONAVE QUE UTILIZAVA-SE DE ASAS ELÍPTICAS

A única desvantagem na utilização deste tipo de asa na época era seu alto custo de fabricação, pois este formato exige grande precisão no ajuste de curvas e acabamento, para se ter um formato de uma elipse perfeita. Provavelmente as primeiras máquinas pré-

programadas, ancestrais dos atuais comandos numéricos, nasceram com esta necessidade. Para minimizar o custo de produção, propôs-se soluções que se aproximavam do formato elíptico, porém com a facilidade muito maior de fabricação. É o caso das asas trapezoidais, onde a corda obedece a uma progressão linear entre a ponta e a raiz da asa. Apesar de não ser uma elipse perfeita, os resultados para uma asa trapezoidal de grande alongação são muito parecidos de uma asa elíptica de mesma razão de aspecto.

A seguir apresentamos alguns tipos de asas e seus respectivos perfis de sustentação.

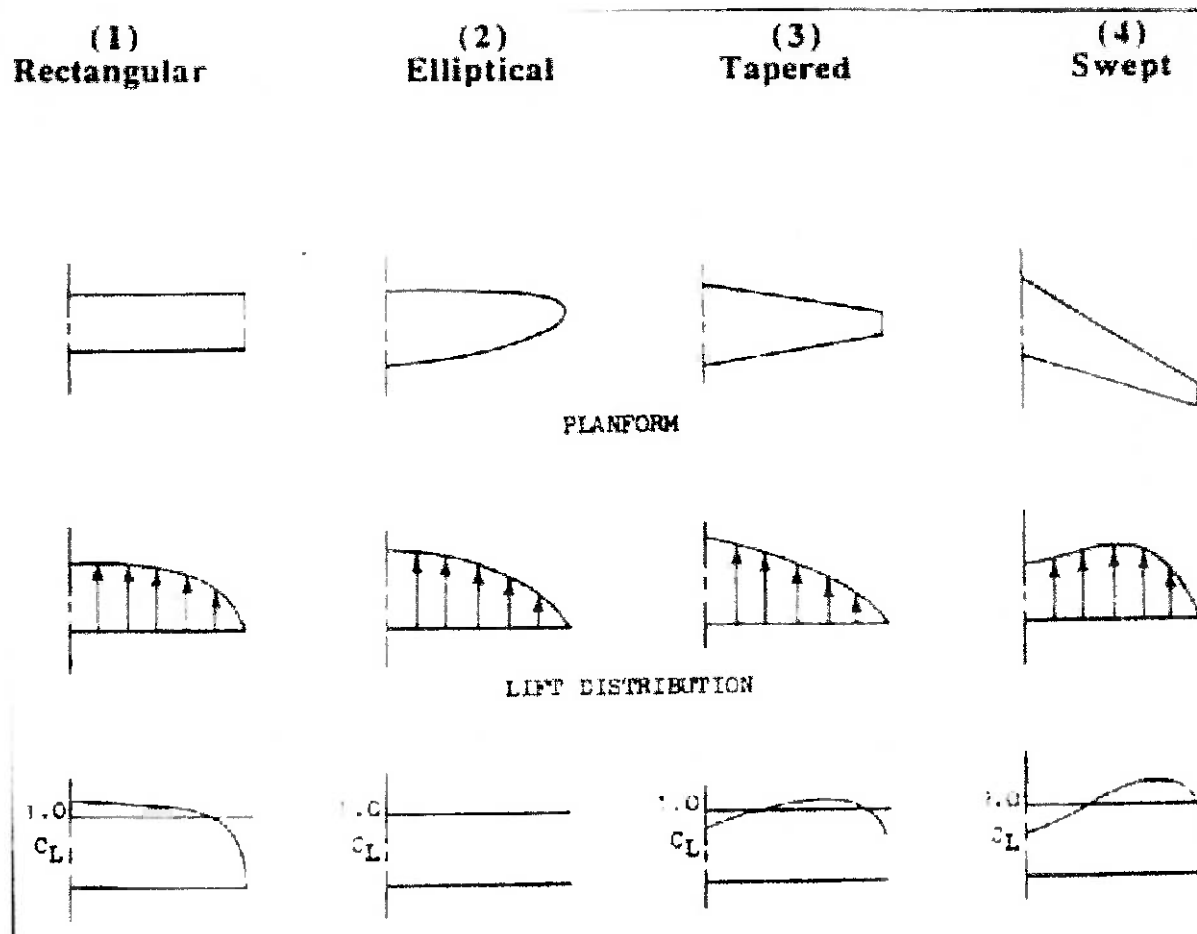


Figura 24: TIPOS DE ASAS - DISTRIBUIÇÃO GERAL DE SUSTENTAÇÃO:

Considere um carregamento genérico de circulação $\Gamma(y)$ ao longo de uma asa com envergadura b e com corda $c = c(y)$ variável, sendo que conhece-se apenas as condições de contorno:

a) Nas pontas, onde $y = b/2$ e $y = -b/2 \Rightarrow \Gamma(y) = 0$

b) No ponto médio, onde $y = 0 \Rightarrow \Gamma(y) = \Gamma_0$

Seja a transformação:

$$y = -\frac{b}{2} \cdot \cos(\theta)$$

e portanto $\Gamma = \Gamma(\theta)$, onde $0 \leq \theta \leq \pi$

Para uma DISTRIBUIÇÃO ELÍPTICA vimos que:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \cdot \sin(\theta)$$

Para uma distribuição genérica pode-se expandir em Séries de Fourier a função $\Gamma(\theta)$ em torno de Γ_0 , obtendo-se a seguinte equação:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \cdot \sum_{n=1}^n (A_n \sin(n\theta)) \quad (\text{EQ. 6.23})$$

Onde os coeficientes A_n são por enquanto desconhecidos.

Derivando Γ em relação a y , obtemos a seguinte relação:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dy} = 2 \cdot b \cdot V_0 \cdot \sum_{n=1}^n (n \cdot A_n \cos(n\theta) \frac{d\theta}{dy}) \quad (\text{EQ. 6.24})$$

Substituindo a equação (6.24) na equação (6.9) podemos obter a EQUAÇÃO GENÉRICA PARA ALINHA DE SUSTENTAÇÃO:

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2.b}{\pi.c(\theta_0)} \sum_{n=1}^n (An \sin(n\theta_0) + \alpha(L=0)) + \sum_{n=1}^n n.An. \left(\frac{\sin(n\theta_0)}{\sin(\theta_0)} \right) \quad (EQ. 6.25)$$

Supondo que a GEOMETRIA da asa seja conhecida, ou seja, se soubermos em cada posição y qual perfil é utilizado e qual o ângulo de ataque local, pode-se calcular os coeficientes An da seguinte forma:

- Divide a asa em N seções igualmente espaçadas onde a posição onde a posição de cada secção n é obtida pela seguinte relação:

$$y_0 = -\frac{b}{2} \cos(\theta_0), \text{ onde } \theta_0 = \arccos \frac{n}{N}$$

- Aplica-se a equação (6.25) em cada secção submetida a seu respectivo ângulo de ataque α_{eff}

- Obtém-se assim um sistema linear $N \times N$ cujas incógnitas são os coeficientes de

- Basta portanto resolver o sistema linear por um método numérico qualquer.

Determinando os coeficiente An pode-se obter diretamente Γ (y_0 pela equação (6.13) e todas as outras relações aerodinâmicas restantes:

Pela Teoria de Linha de Sustentação de Prandtl:

$$CL = \frac{2}{V_0 S} \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) dy = 2 \cdot \frac{b^2}{S} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta \quad (EQ. 6.26)$$

Mas a integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta$$

pode ser resolvida analiticamente e vale:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n > 1 \end{cases}$$

Logo, CL pode ser avaliado como:

$$CL = A1 \pi \cdot \frac{b^2}{S} = A1 \pi \cdot AR \quad (EQ. 6.27)$$

O Coeficiente de Arrasto induzido pode ser calculado como:

$$CDI = \frac{2}{V_0 S} \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) \cdot \alpha_i(y) dy = 2 \cdot \frac{b^2}{S} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \alpha_i(\theta) d\theta \right) d\theta \quad (EQ. 6.28)$$

Para isto, deve-se calcular primeiro α :

$$c_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_0} \int \frac{\frac{\partial \Gamma}{\partial y}}{y_0 - y} dy = \frac{1}{\pi} \sum n A_n \int \frac{\cos(n\theta)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} d\theta \quad (EQ. 6.29)$$

Logo:

$$c_i(o) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \quad (EQ. 6.30)$$

Juntando as equações (6.28), (6.29) e (6.30) obtemos:

$$CDI = 2 \cdot \frac{b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \left(\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta) \right) d\theta \quad (EQ. 6.31)$$

Substituindo a equação (6.27) obtemos finalmente:

$$CDI = 2 \cdot \frac{b^2}{S} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) = \pi A R \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) = \pi A R A l^2 \left(1 + \sum_{n=1}^N n \left(\frac{A_n}{A l} \right)^2 \right) = \frac{C L^2}{\pi A R} (1 + \delta)$$

$$\text{onde, } \delta = \sum_{n=1}^N n \left(\frac{A_n}{A l} \right)^2 \quad (EQ. 6.32)$$

Note que o primeiro termo da expansão do coeficiente CD_i corresponde ao de uma distribuição de SUSTENTAÇÃO ELÍPTICA. Como os termos da somatória sempre assume valores positivos, se os coeficientes A_n tenderem a zero, temos o mínimo valor de CD_i . O

Observe que se os $A_n = 0$, significa que temos apenas o termo independente da Série de Fourier, ou seja, o coeficiente que acompanha $\sin(\theta)$, que significa uma transformação polar cuja correspondência cartesiana é uma elipse. Logo prova-se portanto que a DISTRIBUIÇÃO DE SUSTENTAÇÃO ELÍPTICA é a que oferece MENOR ARRASTO INDUZIDO.

Portanto, em asas finitas, cuja geometria não é elíptica:

$$C_{DI} \geq \frac{C_L^2}{\pi \cdot AR}$$

outro aspecto interessante de asas finitas em relação a asas infinitas, ou aerofólios, à influência do DOWN WASH na derivada $dC_L/d\alpha$:

Considere para um Aerofólio:

$$\alpha_o = \frac{dC_l}{d\alpha}$$

e para uma asa:

$$a = \frac{dC_L}{d\alpha}$$

Sabemos que: $a_{eff} = a - \alpha_i$

Admitindo que não haja torção geométrica ao longo da envergadura, α e a_{eff} são constantes e portanto C_l tem a mesma ordem de grandeza que C_L . Logo:

$$\frac{dCl}{d\alpha_{eff}} = \frac{dCL}{d(\alpha - \alpha_i)} = a_0 \quad (EQ. 6.33)$$

Admitindo $a_0 = cte$:

$$CL = a_0 (\alpha - \alpha_i) + cte$$

Sabendo que: $\alpha_i = \frac{Cl}{\pi \cdot AR}$ para uma asa elíptica.

$$CL = a_0 \left(\alpha - \frac{CL}{\pi \cdot AR} \right) + CTE$$

Derivando em relação a ALFA:

$$\frac{dCL}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi \cdot AR}} \quad (EQ. 6.34)$$

para asas elípticas.

Para uma DISTRIBUIÇÃO GERAL DE SUSTENTAÇÃO, temos:

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = a = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi \cdot AR} \cdot C} \quad (EQ. 6.35)$$

Onde $C = f(A1, A2, \dots, An)$

Com a grandeza $A0/\pi \cdot AR$ é positiva e C uma constante positiva, o efeito de W na sustentação de uma asa também é de DIMINUIR A INCLINAÇÃO DA CURVA DO C_L em relação a curva c_l x alfa do aerofólio. Para razões de aspecto superiores a 5 (Como é o caso de maioria das aeronaves subsônicas), verifica-se experimentalmente que C varia entre 1.05 e 1.25.

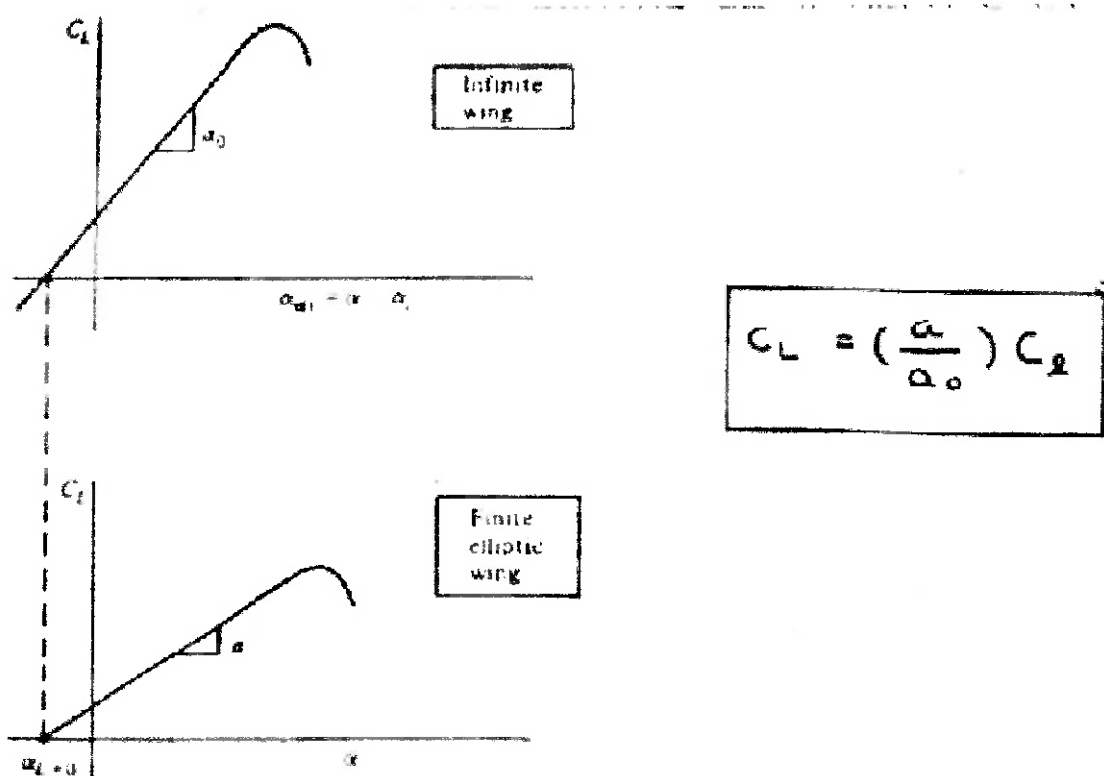


Figura 25: DIFERENÇAS ENTRE AS CURVAS C_L X ALFA e C_l X ALFA

A teoria da linha de sustentação de Prandtl apresenta bons resultados para asas com razão de aspecto elevada e com formato trapezoidal, não se aplicando por exemplo as asas enflexadas ou muito “parrudas” (com envergadura pequena e corda grande, ou seja com pequena razão de aspecto). Em asas enflexadas isso é explicado devido à grande influência do escoamento transversal, não permitindo que se forme uma linha onde possa ser aplicado o perfil de sustentações, ou seja, devido ao escoamento tri-dimensional elevado. Em asas de baixa razão de aspecto a linha de sustentação de Prandtl é muito influenciada pela grande intensidade dos vórtices induzidos, já que estes são inversamente proporcionais à razão de aspecto. Experimentalmente verifica-se que estes tipos de asas não geram a sustentação prevista pela Teoria de Prandtl, que se aplica tem para razões de aspecto superiores a 4 em asas trapezoidais.

Em nosso trabalho desenvolveremos uma rotina computacional que calcule o escoamento em torno de asas finitas trapezoidais utilizando-se da Teoria de Linha de Sustentação de Prandtl, calculando-se os coeficientes de Fourier. Portanto, nosso método será válido apenas para $AR \geq 4$ em asas trapezoidais.

Na figura abaixo ilustramos as experiências de Prandtl para as asas retangulares em relação à influência da razão de aspecto no arrasto induzido. observe que a partir de $AR=5$ as curvas coincidem.

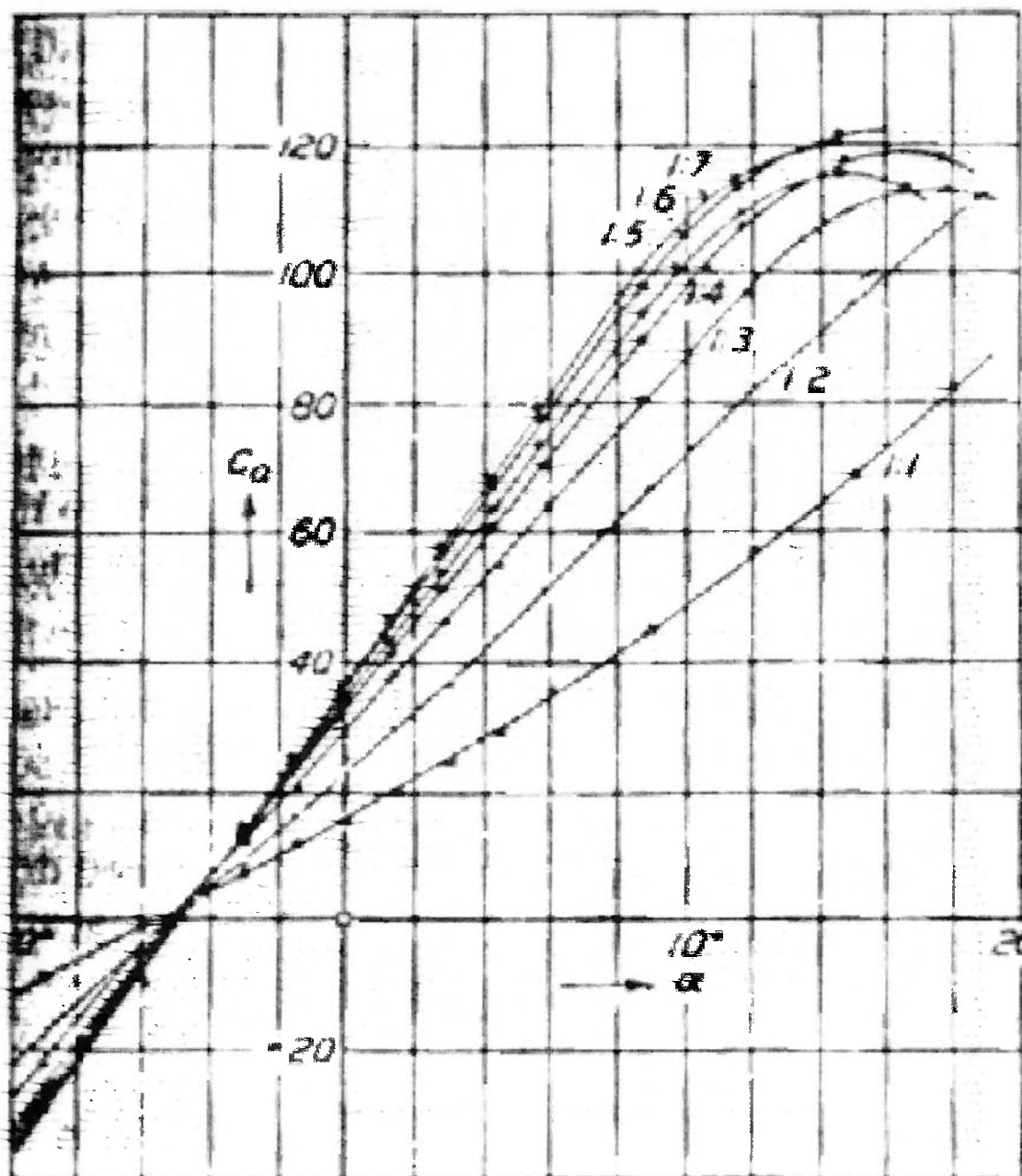


Figura 26: RELAÇÃO C_{Di} x ALFA PARA CADA RAZÃO DE ASPECTO

MOMENTOS DE UMA ASA FINITA

Assumindo a existência das forças L e D i em uma asa finita, podemos em cada seção determinar o momento gerado por estas em relação aos eixos da origem, localizados na corda central.

Tomando como origem do eixo x o ponto situado a $1/4$ de corda, para uma seção localizada na posição y temos atuando nestas as forças elementares dL e dD i, que produzirão um momento elementar dM :

$$\begin{aligned} dM &= y \cdot \vec{j} \times (dL \cdot \vec{k}) + y \cdot \vec{j} \times (dD \cdot \vec{i}) = y \cdot \vec{j} \times (dL \cdot dy \cdot \vec{k}) + y \cdot \vec{j} \times (dD \cdot dy \cdot \vec{i}) \rightarrow \\ &\rightarrow dM = ((y \cdot L \cdot \vec{i} + y \cdot D \cdot (-\vec{k})) dy \end{aligned} \quad (EQ. 6.36)$$

Integrando a equação acima temos:

$$M = \left(\int_0^{b/2} y \cdot L \cdot dy \right) \vec{i} + \left(\int_0^{b/2} y \cdot D \cdot dy \right) (-\vec{k}) \quad (EQ. 6.37)$$

Substituindo na equação (6.36) as equações que definem L e D i, obtemos:

$$M = (\rho \cdot V \cdot \alpha \cdot \int_0^{b/2} \Gamma(y) \cdot y \cdot dy) \cdot \vec{i} + (\rho \cdot V \cdot \alpha \cdot \int_0^{b/2} W(y) \Gamma(y) \cdot dy) \cdot (-\vec{k}) \quad (EQ. 6.38)$$

separando as componentes na direção x e na direção z podemos identificar dois tipos de momentos:

- MOMENTO DE GUINADA (YAW) que provoca a tendência de deslocar o nariz da aeronave lateralmente, rolando em torno do eixo z :

$$My = \rho \theta \cdot \int_0^{b/2} W(y) \Gamma(y) \cdot y \cdot dy$$

$$CM_y = \frac{2}{V_o^2 \cdot S \cdot C} \cdot \int_0^{b/2} W(y) \Gamma(y) \cdot y \cdot dy$$

(EQ. 6.38)

- **MOMENTO DE ROLAGEM (ROLL)** que provoca a tendência de rolar a aeronave em torno do eixo x:

$$M_r = \rho \theta \cdot V_o \cdot \int_0^{b/2} \Gamma(y) \cdot y \cdot dy$$

$$CM_y = \frac{2}{V_o^2 \cdot S \cdot C} \cdot \int_0^{b/2} \Gamma(y) \cdot y \cdot dy$$

(EQ. 6.38)

onde $C = CMA$ e $S = \text{Área da asa}$

Note que estes momentos só são definidos para a semi-asa, pois se considerarmos a asa inteira estes se anulam. A utilidade destes portanto é puramente estrutural, pois é interessante que se tenha o conhecimento destes na raiz da asa para que se dimensionem as Longarinas que suportam toda a sua estrutura convenientemente.

O **MOMENTO DE "PITCH"** cuja tendência é elevar ou baixar o nariz da aeronave, rolando-a em torno do eixo y, pode ser obtido por método idêntico ao do cálculo do aerofólio. A posição do centro de pressão é considerada em relação a **CORDA MÉDIA AERODINÂMICA** (utilizando-se da análise para o aerofólios para este valor da corda) e a sustentação envolvida no cálculo é agora a sustentação da ASA. Analogamente à equação (5.77), podemos escrever portanto que:

$$M(c/4) = (X_{cp} - c/4) \cdot L(X_{cp} - c/4) \cdot \rho \cdot V_0 \int_0^{b/2} \Gamma(y) \cdot y \cdot dy \quad (EQ. 6.39)$$

$$C_{My} = \frac{2}{V_0 \cdot S} \cdot \left(\frac{X_{cp}}{c} - 1/4 \right) \int_{-b/2}^{+b/2} \Gamma(y) \cdot dy$$

Este momento tem importante relação com a estabilidade dinâmica do voo de uma aeronave.

ARRASTO EM ASAS FINITAS

Vimos no cálculo de sustentação que a presença do DOWN WASH alterava o ângulo de ataque do aerofólio., mudando de direção o vetor da sustentação total., fazendo com que surja uma nova componente de arrasto na direção do v_0 , determinado ARRASTO INDUZIDO.

Portanto para calcularmos o arrasto total produzido por uma asa devemos incluir, além do Arrasto de Fricção e de Pressão, também o Arrasto de Induzido. Assim o coeficiente de arrasto total será:

$$C_D = C_{Di} + C_{Dp} + C_{Df} = C_{DI} + C_A$$

Onde C_A é o denominado Arrasto Aerodinâmico, sendo a somatória do arrasto de pressão com o arrasto de fricção:

Sabemos como calcular C_{Di} a partir dos resultados das seções anteriores. Vamos agora, a partir do modelo bi-dimensional desenvolvido para chapas planas aplicado a aerofólios, estimar o coeficiente C_A .

Considerando que uma asa é uma sucessão de aerofólios dispostos lado a lado, escolhemos uma secção elementar genérica de largura infinitesimal dy , localizada na posição y , cuja

corda tem comprimento $c(y)$, em um ângulo de ataque genérico $\alpha(y)$, gerando um arrasto aerodinâmico infinitesimal dA .

Sabemos que: $dA(y) = D(y) \cdot dy$

Desenvolvendo a equação acima e isolando CD temos:

$$\frac{1}{2} \rho V_o^2 \cdot S \cdot CD = \frac{1}{2} \rho V_o^2 \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} c(y) \cdot cd(y) \cdot dy \quad (EQ. 6.40)$$

$$CD = \frac{1}{S} \int_{-b/2}^{+b/2} c(y) \cdot cd(y) \cdot dy$$

O coeficiente de arrasto aerodinâmico da asa é portanto uma média ponderada do coeficiente de arrasto previsto para o aerofólio utilizado naquela seção de asa com o comprimento de sua corda local. Note Que. se for utilizado o mesmo tipo de aerofólio na asa toda e o ângulo de ataque for também igual em todas as seções, o coeficiente de arrasto aerodinâmico será idêntico ao previsto pelo aerofólio e portanto:

$$CD = cd + CDi$$

O coeficiente de arrasto local foi anteriormente deduzido pela expressão:

$$Cd(y) = \sin^2(\alpha(y)) + 2 \cdot \cos(\alpha(y)) \cdot \left(\frac{0,074}{Re(c(y))^{0,2}} - \frac{1700}{Re(c(y))} \right)$$

$$Re(c(y)) = \frac{\rho \cdot V_o \cdot \cos(\alpha(y)) \cdot c(y)}{\mu_o}$$

Substituindo na equação (6.40), chegamos a :

$$CA = \frac{1}{S} \left(\int_{-b/2}^{+b/2} c(y) \cdot \sin^2(\alpha(y)) + 2 \cdot \cos(\alpha(y)) \cdot \left(\frac{0,074}{\text{Re}(c(y))^{0,2}} - \frac{1700}{\text{Re}(c(y))} \right) dy \right)$$

(EQ. 6.41)

Se discretizarmos a asa em N subdivisões podemos integrar a equação acima numericamente. Utilizando-se da regra dos trapézios e definindo $f(y)$ como:

$$f(y) = Cd(y) \cdot c(y)$$

Finalmente chega-se a expressão:

$$CA = \frac{b}{2 \cdot N \cdot S} \cdot \left(\sum_{i=1}^N 2 \cdot (c(y_i) \cdot Cd(y_i)) + (c(y_0) \cdot Cd(y_0) + c(y_N) \cdot Cd(y_N)) \right)$$

(EQ. 6.42)

O ARRASTO TOTAL DA ASA será portanto:

$$CD = CA + CDi = \frac{CL^2}{\pi \cdot AR} \left(1 - \sum_{n=1}^N \left(\frac{An}{Al} \right)^2 \right) + \frac{b}{2 \cdot N \cdot S} \cdot \left[2 \sum_{i=1}^N (c(y_i) \cdot Cd(y_i)) + (c(y_0) \cdot Cd(y_0) + c(y_N) \cdot Cd(y_N)) \right]$$

(EQ. 6.43)

Apresentados todos os modelos matemáticos que representam o comportamento aerodinâmico de uma asa imersa em um escoamento subsônico e incompressível, resta-nos agora definir as características termodinâmicas deste escoamento nas condições de projeto, ou seja, no nível de voo de cruzeiro que escolhemos para a aeronave operar. Para isto, devemos recorrer a um modelo matemático elaborado para descrever de forma aproximada o comportamento real termodinâmico da atmosfera terrestre a medida que nos afastamos da superfície através do **MODELO DE ATMOSFERA PADRÃO OU ISA** (Ideal Standard Atmosphere), adotado a partir Convenção Internacional de Aeronáutica em Montreal (1947), e representa o padrão internacional para projeto e operação de aeronaves.

VII) ATMOSFERA PADRÃO

Considerações iniciais:

- O ar é considerado GÁS PERFEITO com $K = 1.4$ em qualquer ponto da atmosfera e não apresenta umidade (AR SECO).
- A superfície de referência onde $z = 0$ corresponde ao NÍVEL MÉDIO DO MAR. A partir desta cota são medidas ALTITUDES.
- Considera-se a atmosfera estática, não havendo deslocamentos de massas de ar e interações do tipo transferência de calor por convecção ou radiação entre as camadas.

Considere uma camada atmosférica na altitude z , com espessura dz de modo que a altitude z a pressão estática é p , na altitude $z + dz$ a pressão estática é $p + dp$.

Pela Primeira Lei da Termodinâmica para sistemas, se considerarmos Que. esta camada não apresenta em suas fronteiras interações do tipo calor e trabalho, chega-se à relação HIDROSTÁTICA:

$$\boxed{dp = -p \cdot g \cdot dz} \quad (EQ. 7.1)$$

Se z for muito grande, da origem de grandeza de alguns quilômetros, o valor de g começará a variar com a altitude de acordo com a Lei da Gravitação Universal:

$$g = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{r}\right)^2} \quad (EQ. 7.2)$$

Definimos a partir disto a variável $H(z)$ como FUNÇÃO GEOPOTENCIAL pela equação:

$$H = \frac{1}{g_0} \int_0^z g \cdot dz = \frac{1}{g_0} \int_0^z \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{r}\right)^2} dz = \frac{r \cdot z}{(r + z)} \quad (EQ. 7.3)$$

Note que H tem unidade de comprimento, correspondendo à uma média ponderada da cota z com o valor de g local, H é na verdade uma cota geométrica dada para um campo gravitacional uniforme, com a mesma energia potencial do campo gravitacional terrestre até aquela altitude, que não é uniforme. Verifique que em $z = 0$, $H = 0$, e assim como $z = 0$.

Combinando as equações 97.3) e (7.1), considerando o AR GÁS PERFEITO temos:

$$dp = -\frac{g_0}{R} \cdot \left(\frac{p}{T}\right) \cdot dH \quad (\text{EQ. 7.4})$$

Considerando uma dada camada atmosférica (n), abaixo da camada de cota z, a uma altitude GEOPOTENCIAL H_n , podemos integrar a equação de z_n a z :

$$\int_{z_n}^z \frac{dp}{p} = -\frac{g_0}{R} \int_{z_n}^z \frac{dH}{T} \quad (\text{EQ. 7.5})$$

Se considerarmos o ar se expanda de forma ISOENTRÓPICA (adiabaticamente e de forma reversível) ao longo da atmosfera, temos pela primeira Lei da Termodinâmica:

$$TdS = dH - u dp = 0 \rightarrow dh = u dp$$

Para gás perfeito :

$$\begin{aligned} C_p \cdot dT &= \frac{RT}{p} \cdot dp \\ C_p \cdot \frac{dT}{T} &= R \frac{dp}{p} = -\gamma \cdot \frac{dz}{T} \\ dT &= -\frac{g}{C_p} dz \\ \int_{T_0}^T dT &= \int_{z_n}^z -\frac{g}{C_p} dz \xrightarrow{\frac{g}{C_p} = \text{cte}} T = T_n - \left(\frac{g}{C_p}\right) \cdot (z - z_n) \end{aligned}$$

$$(\text{EQ. 7.6})$$

Se considerarmos as camadas mais baixas da atmosfera, pode-se supor que (g/C_v) é aproximadamente constante, já que o fator z/r é muito menor do que 1 e portanto:

A TEMPERATURA VARIA LINEARMENTE COM A ALTITUDE nas baixas camadas da atmosfera. Até aproximadamente 33000 Ft esta afirmação é verdadeira, ou seja, DENTRO DA TROPOSFERA onde voam a maioria da aeronaves de pequeno e médio porte.

Para se ter uma idéia da pequena variação de H em relação a z na TROPOSFERA, se considerarmos a altitude limite de oxigênio respirável pelo ser humano de 12000 Ft (Aproximadamente 4 km):

$$H = 11998 \text{ FL para } z = 12000 \text{ Ft}$$

$$H/z = 0.9994$$

$$\text{Como } (g/g_0) = (H/z)^2, g = 0.9988 \cdot g_0$$

Portanto podemos comprovar que g quase não variou ao subir 4000 tn, tornando válidas as hipóteses acima.

Assim, assumindo que T varie linearmente com a altitude, podemos também escrever que:

$$T = T_n + A_n \cdot (H - H_n) \quad (\text{EQ. 7.7})$$

Onde A_n é o GRADIENTE DE TEMPERATURA ISOENTRÓPICO PADRÃO para a CAMADA INICIAL n .

Integrando a equação (7.5), obtemos: (Juntamente com $p = PRT$)

$$p = p_n \cdot e^{\left(-\frac{g_0}{R \cdot T_n} \cdot (H - H_n)\right)}$$

$$T = T_n + A_n(H - H_n)$$

$$\rho = \rho_n \cdot \left(\frac{T}{T_n}\right)^{-\left(1 + \frac{g_0}{\rho_n \cdot R}\right)}$$

(EQ. 7.8),

(EQ. 7.9)

(EQ. 7.10)

Para o cálculo da viscosidade, Sutherland descobriu a seguinte relação IMPÍRICA:

$$\mu = \mu_n \cdot \left(\frac{T}{T_n}\right)^{1.5} \cdot \left(\frac{T_n + 110}{T + 110}\right) \quad (\text{EQ. 7.11})$$

A velocidade do som nesta camada pode ser obtida a partir de:

$$\frac{c}{c_n} = \sqrt{\frac{T}{T_n}} = \sqrt{1 + \frac{A_n}{T_n} \cdot (H - H_n)} \quad (\text{EQ. 7.12})$$

Na TROPOSFERA, camada que se estende desde o NÍVEL MÉDIO DO MAR (NMM) até cerca de 33000 Ft (11 Km), as sondagens meteorológicas encontram os seguinte valor médio para o gradiente isoentrópico de temperatura A_n :

	CAMADA n	Zn (m)	Hn (m)	An (°C/m)
(MSL)	0	0	0	0

TROPOSFERA	1	11.019	11.000	- 6 . 5E-3
------------	---	--------	--------	------------

Na Convenção Internacional de Montreal padronizou-se, para efeitos de cálculos, Que, ao nível médio do mar as condições da atmosfera padrão (ou ISA) seriam, segundo as médias observadas mundialmente, as seguintes:

$$g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$p_0 = 101325 \text{ Pa}$$

$$T_0 = 15^\circ\text{C}$$

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_0 = 17.8964\text{E} - 6 \text{ kg/m.s}$$

$$c_0 = 340.294 \text{ m/s}$$

A partir destas relações podemos calcular, a qualquer ponto da TROPOSFERA, as propriedades termodinâmicas do AR, considerando que no nível médio do mar estejam predominando as condições ISA.

Por curiosidade apresentamos na tabela abaixo os valores padronizados de An, Hn e Zn, para cada camada da atmosfera terrestre seguindo o modelo de atmosfera padrão:

CAMADA	n	An (10 ⁻³ K/m)	Hn (m)	Zn (m)	Tn (m)
TROPOSFERA	0	-6,5	0	0	288,150
TROPOPAUSA	1	0,0	11000 20000	11019 20063	216,65 216,65
ESTRATOSFERA	2	1,0	32000	32162	228,65
ESTRATOSFERA	3	2,8	47000	47380	270,65
ESTRATOPAUSA	4	0,0	52000	52429	270,65
MESOSFERA	5	-2,0	61000	61591	286,65
MESOSFERA	6	-4,0	79000	79994	180,65
MESOPAUSA	7	0,0	88743	900000	180,65

Por último exporemos um fenômeno interessante do voo em altitude ocorrido com a velocidade da aeronave:

Suponha que ao nível médio do mar, uma aeronave de peso w se encontre voando com velocidade v_0 , de acordo nas condições da atmosfera padrão. O valor de sua sustentação deve ser no mínimo igual ao seu peso para manter voo reto horizontal.

Suponha que esta mesma aeronave, com o mesmo peso w , esteja voando agora em uma altitude z em relação ao nível médio do mar com velocidade v . Para que esta possa manter voo reto horizontal sua sustentação também é igual a seu peso, Logo:

$$W = L_0 = L$$

e portanto:

$$\frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S C_{Lo} = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

Se esta aeronave conseguir voar reto horizontal com o mesmo ângulo de ataque, C_L será o mesmo nos dois casos pois este depende apenas do ângulo de ataque da aeronave. Para conseguirmos realizar esta hipótese é necessário que a potência desenvolvida pelo motor na altitude mais alta seja maior para compensar o efeito da diminuição da densidade, mantendo uma mesma potência nos dois casos. Se esta hipótese for verdadeira:

$$q = q_0$$

e portanto:

$$\frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

OBS.: Verifique que para manter-se uma mesma potência necessária a manter voo horizontal é necessário aumentar a velocidade para compensar o decréscimo da densidade, já que C_D também permanece inalterado.

Ou seja, para compensar perda de densidade, a velocidade aerodinâmica da aeronave AUMENTA com a altitude, para uma mesma velocidade indicada no velocímetro.

Geralmente nas aeronaves o sistema de medição de velocidades é baseado nos dados de pressão proveniente de tomadas de pressão estática e pressão total de um ou mais tubos de pitot. Como a pressão dinâmica é a mesma tanto no nível do mar, quanto em altitude para manter uma mesma configuração de peso, tudo se passa como se o velocímetro estivesse marcando a velocidade ao nível do mar, independentemente da altitude. Assim é necessário distinguir a VELOCIDADE INDICADA NO VELOCÍMETRO pela VELOCIDADE

VERDADEIRA ou AERODINÂMICA da aeronave. Portanto, de acordo com a atmosfera padrão:

$$VA = VI \cdot \left(\frac{T_o}{T}\right)^{-\left(1 + \frac{g_o}{A_o R}\right)} = VI \cdot \sqrt{e^{\frac{g_o}{R T_o} H}} \quad (EQ. 7.13)$$

VA = Velocidade Aerodinâmica na Geopotencia H

VI = Velocidade Indicada = v_0

OBS.: Considerando-se que a atmosfera esteja em condições ISA, caso contrário:

$$VA = VI \sqrt{\frac{p_o}{p}} = VI \sqrt{\frac{p_o}{p} \cdot \frac{T}{T_o}}$$

o = Condições Termodinâmicas ao Nível do Mar.

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS

Afim de analisarmos toda a teoria descrita nos capítulos anteriores, montou-se um modelo de um asa em balsa a qual posteriormente foi estudada pelo método de Elementos finitos. A asa modelada foi a asa de um aeromodelo tipo trainer com o extradorso plano afim de se facilitar os cálculos e medições.

As figuras abaixo mostram com detalhes o perfil de asa modelado construída em balsa bem como do modelo de nervura usado no programa de Elementos Finitos.

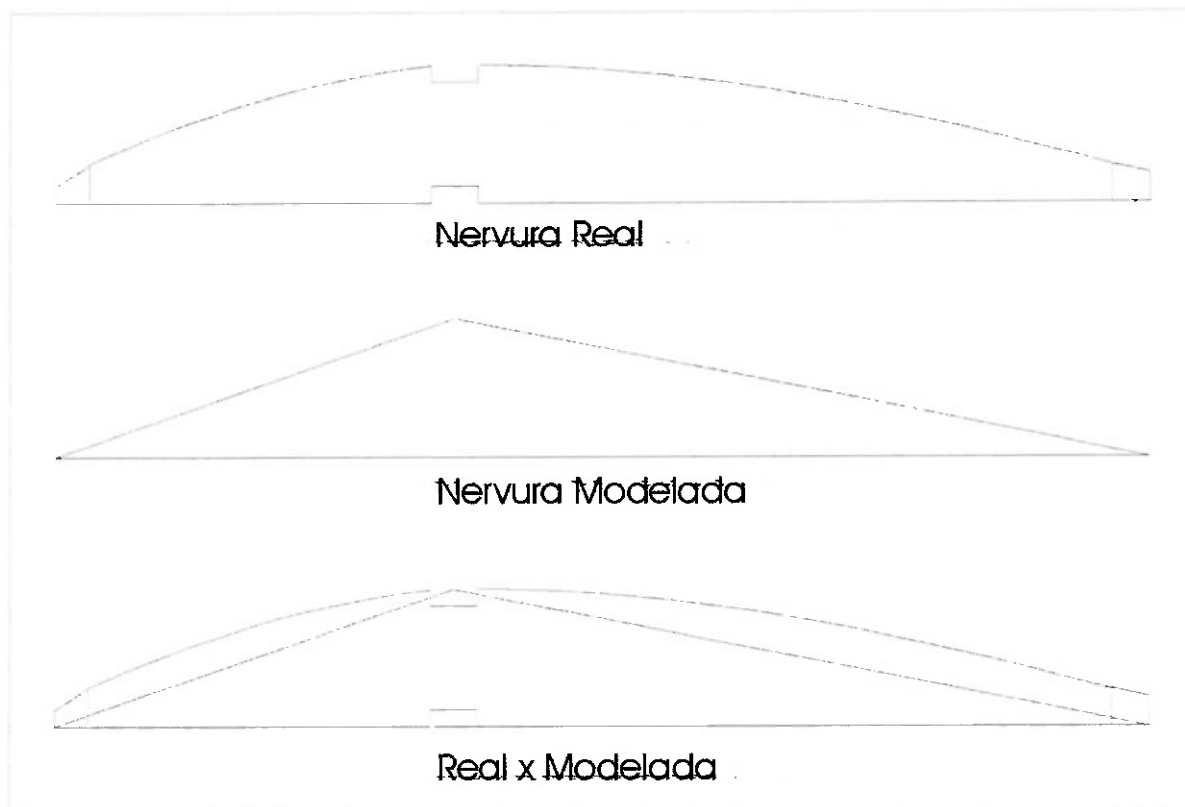


Figura : 1 – Detalhes da nervura

O modelo em balsa foi construído com o perfil de nervuras acima, sendo 22 nervuras equiespaçadas de 75 mm com espessura de 2mm, resultando num comprimento total de asa (envergadura) de 1575 mm mais as duas ponteiros de asa.

Como se pode ver na figura acima, temos 2 longarinas principais que cortam todas as 22 nervuras. Tem-se ainda o Bordo de ataque e o bordo de fuga também em balsa.

O modelo foi entelado com um tipo de plástico muito parecido com o papel contact afim de termos baixo peso e ao mesmo tempo uma boa resistência à velocidade e vibração do fluido por onde a asa estará escoando.



Figura : 2 – Detalhe da nervura



Figura : 3 – Detalhe da Asa em Balsa

O modelo de nervura proposto para se fazer a análise por Elementos Finitos está representado na figura 4.

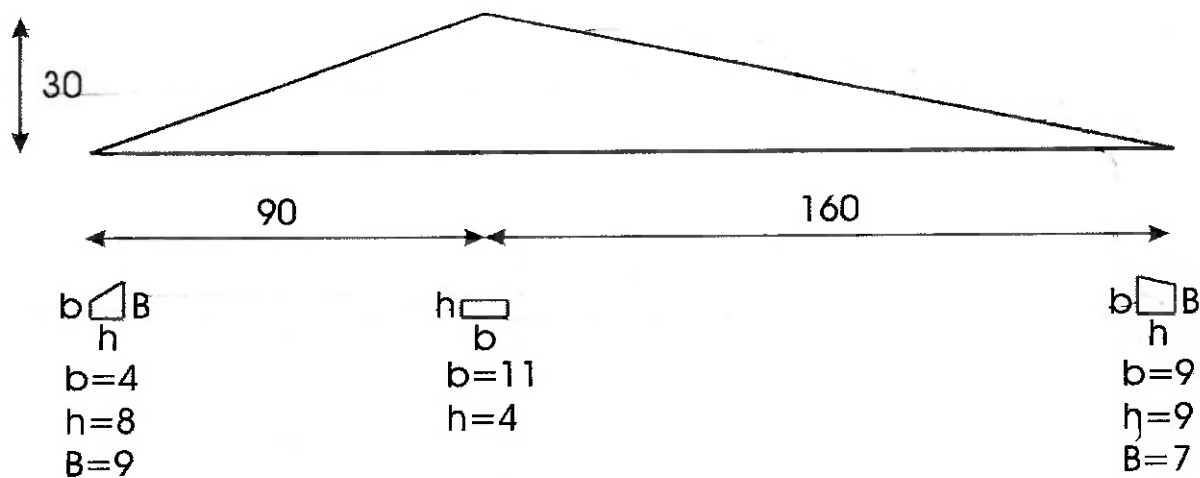


Figura : 4 – Modelo de nervura em Elementos Finitos.

Este modelo de nervura está com as medidas em milímetros. Modelou-se a nervura propriamente dita como sendo um elemento de Chapa, com espessura de 2mm e com a geometria descrita na figura acima.

Todas as longarinas bem como os bordos de ataque e de fuga foram modelados com elementos de viga, com as geometrias descritas na figura. Suas propriedades geométricas foram calculadas afim de termos uma melhor eficiência da modelagem.

A entelagem foi modelada como elemento de membrana com 0,1 mm de espessura. Na verdade, esta membrana faz o papel de distribuir a pressão uniformemente pela asa toda afim de termos uma pressão simétrica e igual em postos geometricamente opostos.

As propriedades mecânicas da balsa foram conseguidas de livros e tabelas e estão em anexo neste trabalho.

Determinada a geometria, seguiu-se com a modelagem e determinou-se o tipo de "constraint" usados. Resolvemos adotar a asa como engastada nas duas nervuras centrais. Poderíamos ter usado meia asa e modelar como uma viga em balanço, mas, para isto,

estaria se supondo que os esforços são simétricos em relação aos lados da asa. Esta hipótese é quase sempre verdadeira mas, assim não conseguiríamos analisar os esforços presentes na estrutura se um carregamento não simétrico fosse aplicado. Assim resolvemos deixar a hipótese de simetria de lado.

Quanto ao carregamento, aplicamos uma pressão de $8 \text{ N} / \text{m}^2$ no elemento de membrana modelado e partimos para os resultados. As figuras abaixo mostram a modelagem.

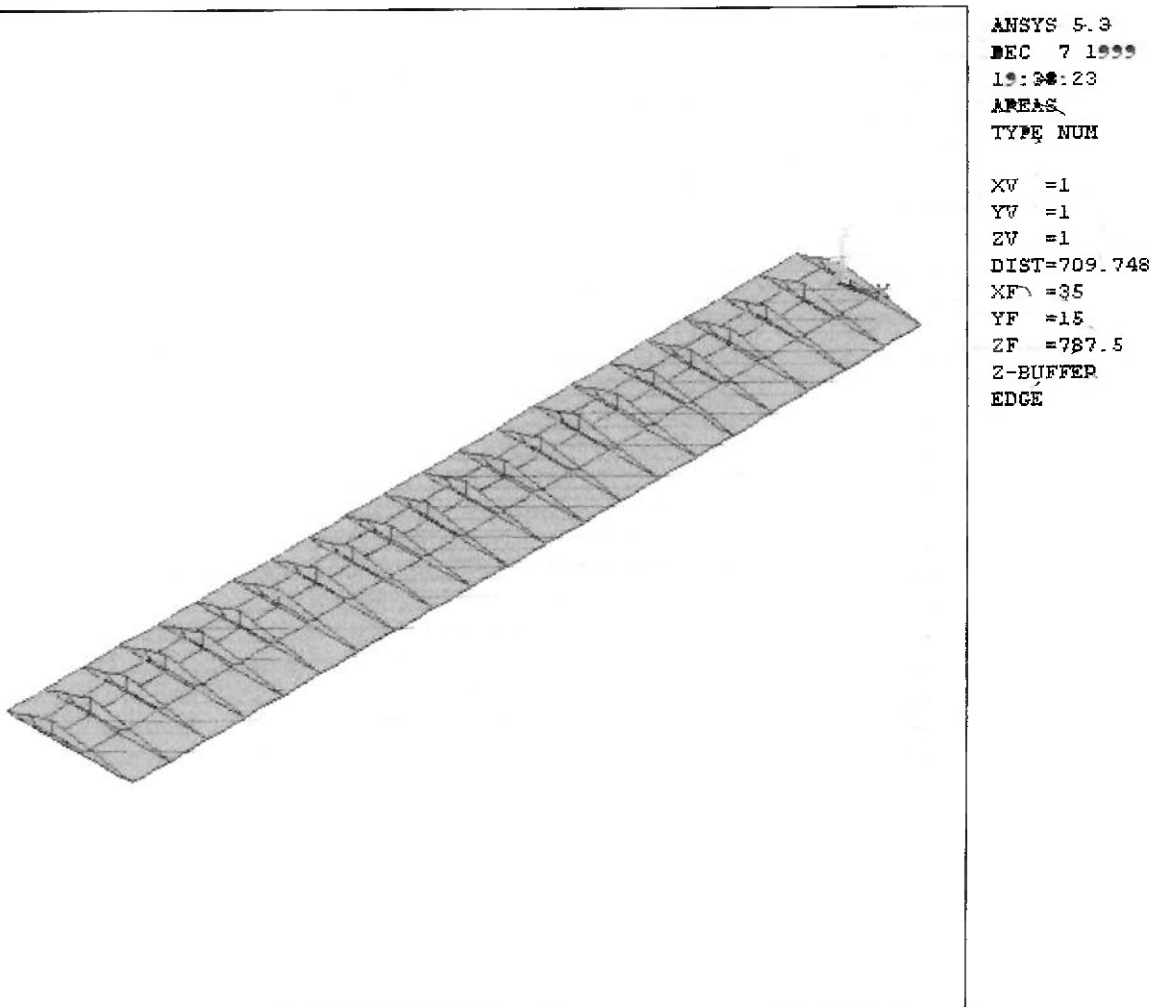


Figura : 5 – Esquema da modelagem

Com o modelo pronto, restou apenas analisar os resultados. Como era de se esperar, os maiores esforços foram absorvidos pelas longarinas. Muito pouco esforço foram suportados pelas nervuras. O máximo deslocamento encontrado foi de aproximadamente de 15 mm, o que está bem razoável. A máxima tensão pelo critério de Von Misses foi de 15 Mpa na região central (engaste) e sobre a longarina inferior.

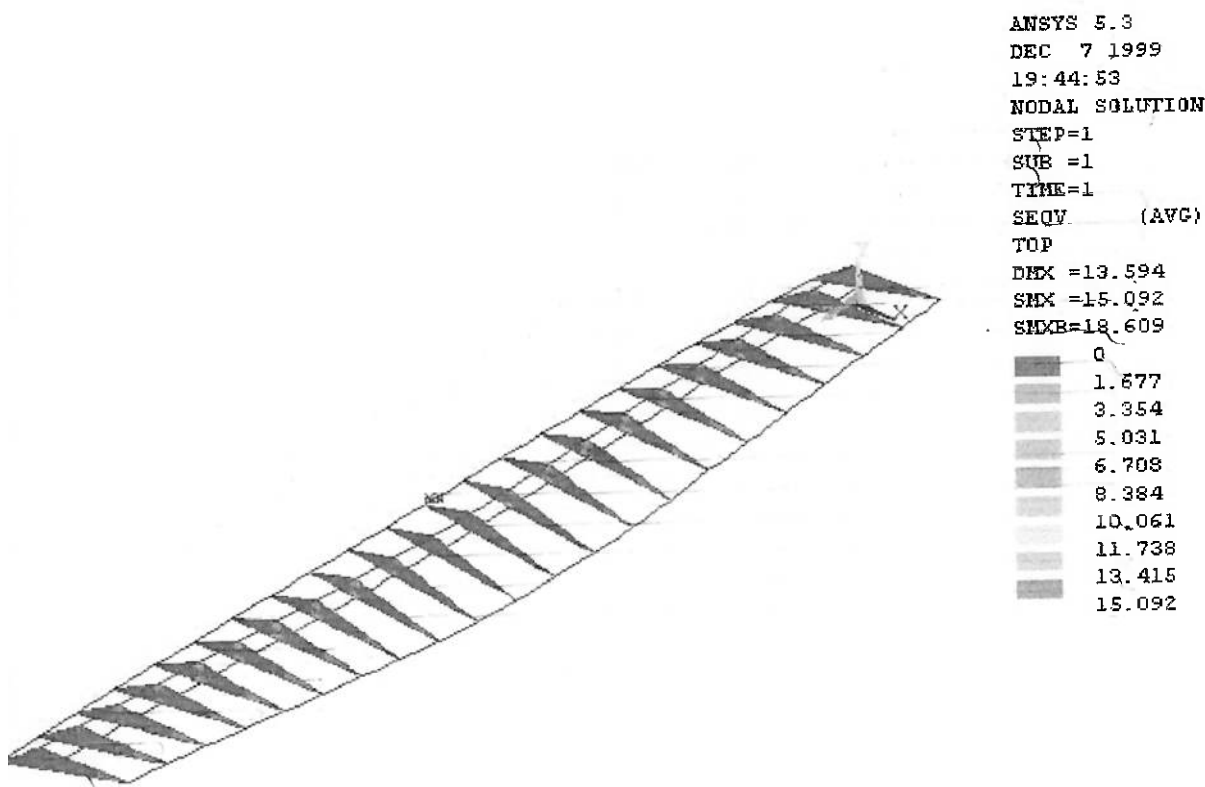


Fig : 6 – Gráfico dos Deslocamentos

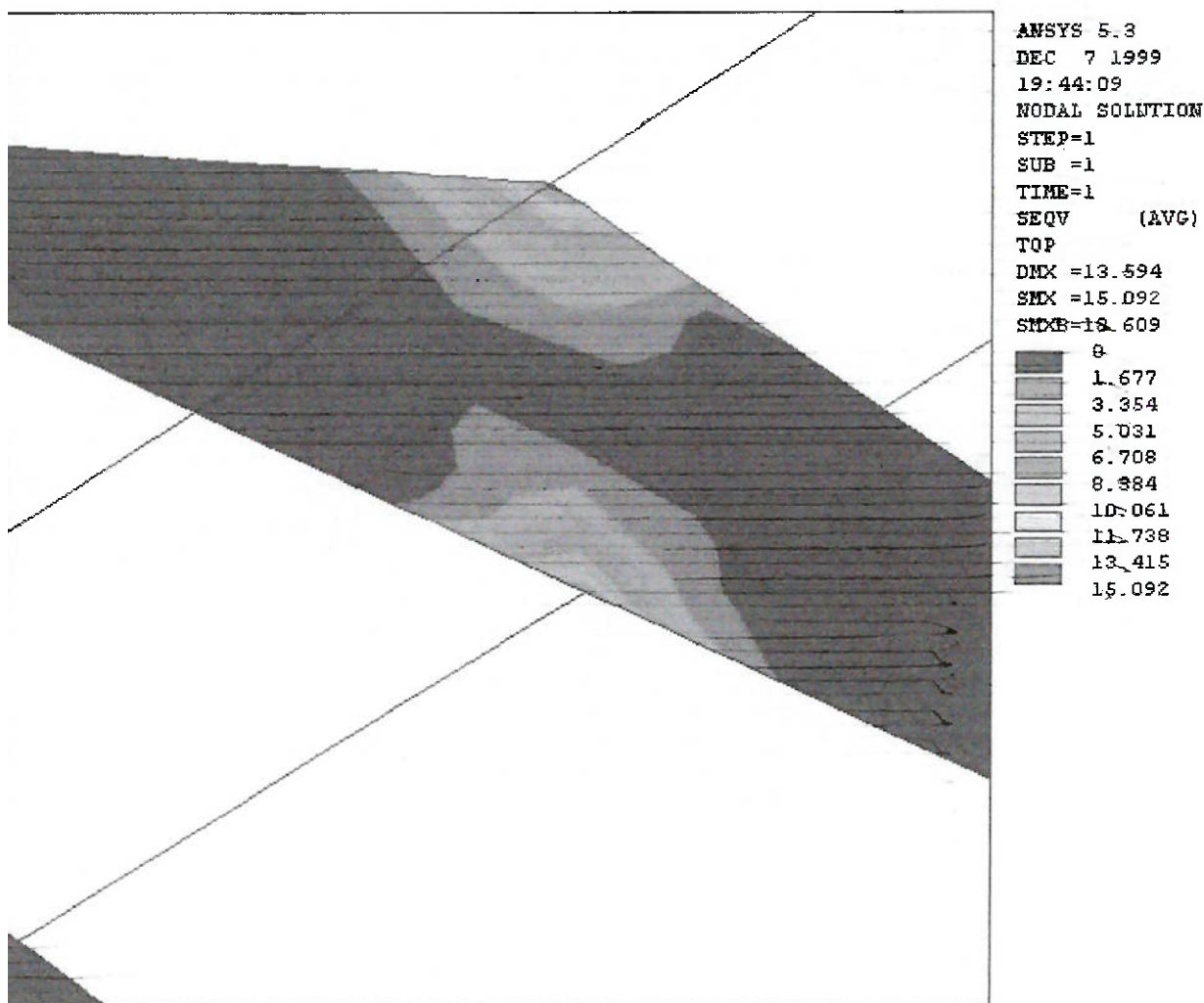


Figura : 7 – Tensões atuantes na nervura

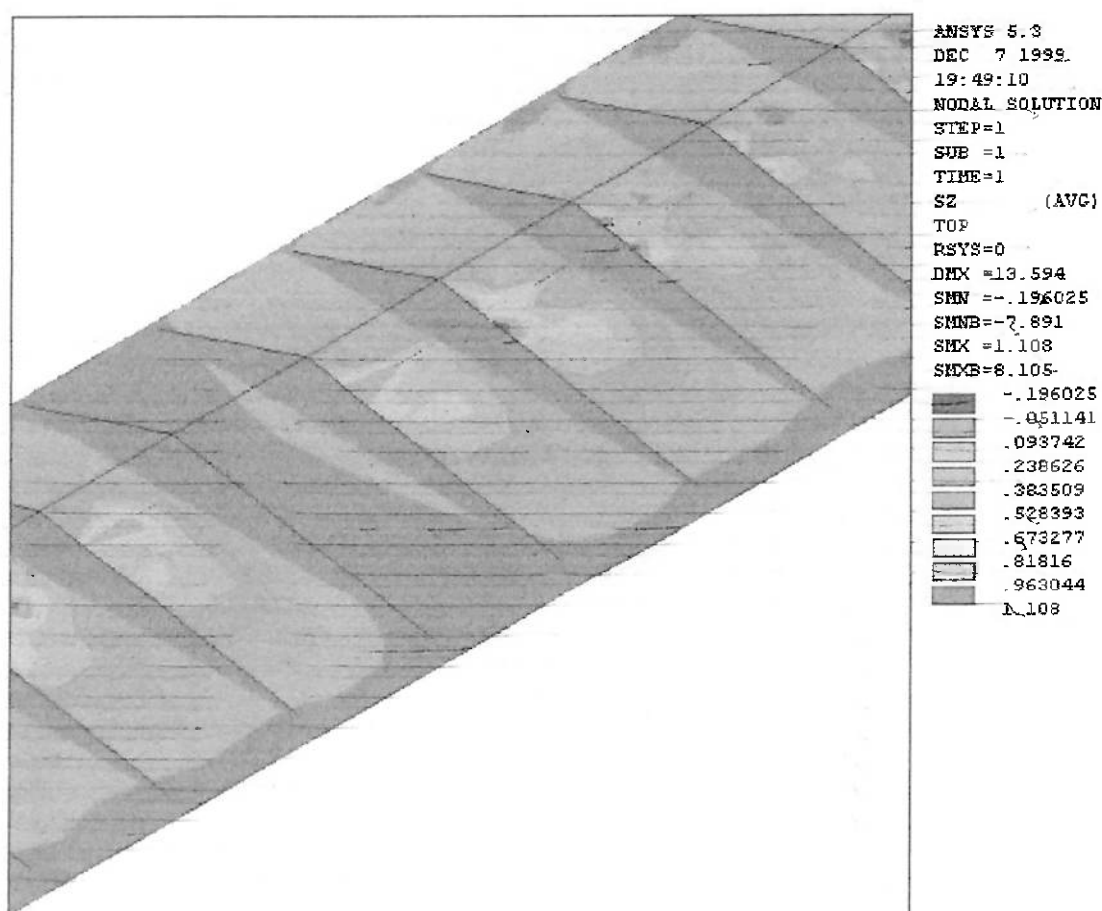


Figura : 8 – Tensões Longitudinais.

MEDICÃO DE DESLOCAMENTOS POR RELÓGIO COMPARADOR

Com o intuito de verificar a acuraria do modelo, resolveu-se medir alguns deslocamentos da asa para cargas conhecidas. Para tanto usamos um relógio comparador e um aparato de engastamento da asa em uma posição conhecida. A partir do deslocamento medido pelo relógio, simulados a mesma carga e nas mesmas condições de engaste, qual seria o deslocamento esperado. Os resultados foram melhores que os esperados. O relógio indicou um deslocamento de 0,98 mm para uma carga de 23g colocada à 1200 mm do engaste. O método dos Elementos finitos chegou num deslocamento de 1,15 mm nas mesmas condições. As figuras abaixo detalham o experimento.

658a

Elementos Finitos
~~Cinco Estructura~~ Alombras
(estructuras)

~~estructuras~~
SYSNO 1243574

Letra I

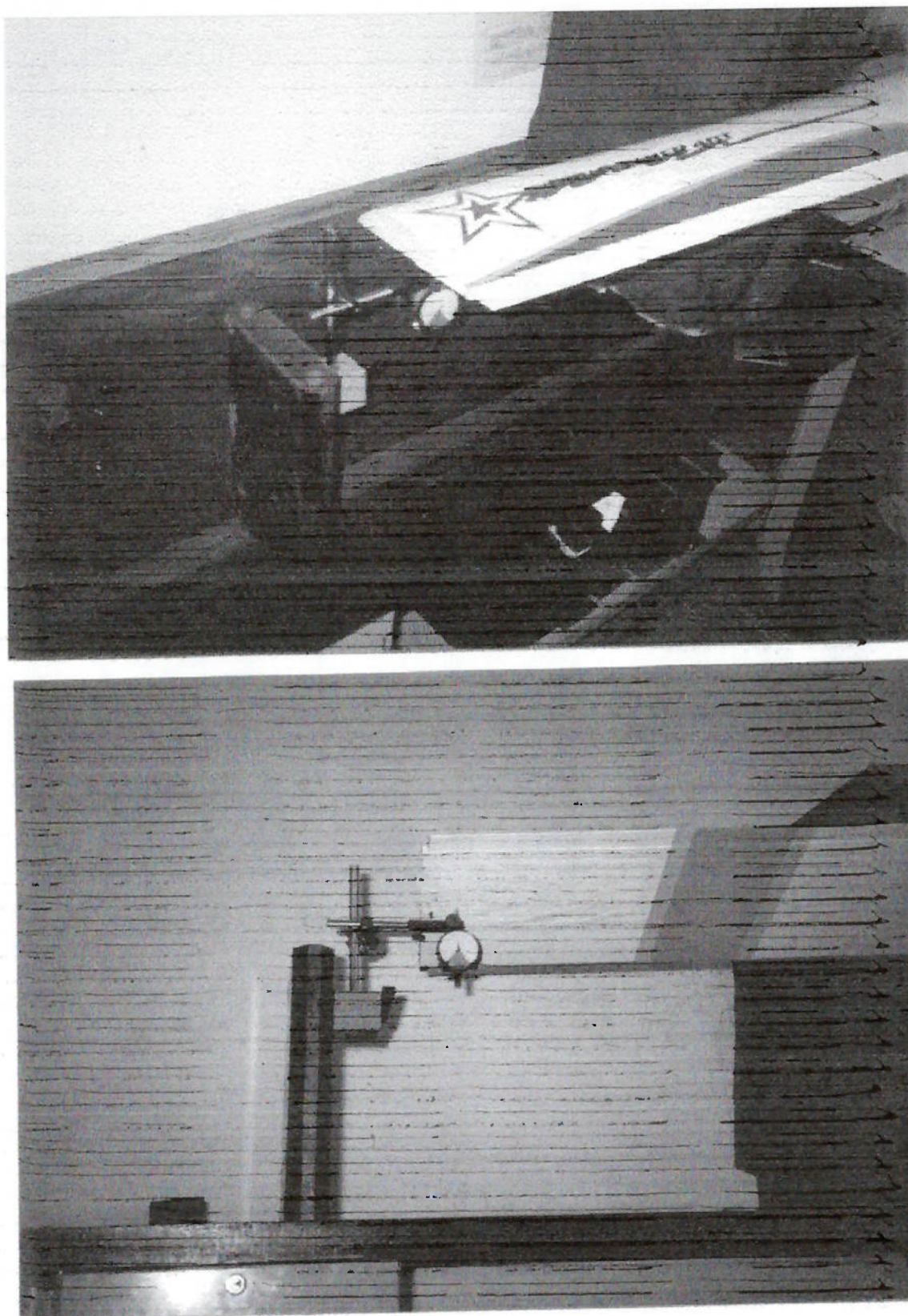


Figura :9 – Detalhes do Experimento

CONCLUSÃO

Pode-se considerar que a aproximação pelo modelo de Elementos Finitos ficou bem próximo da realidade sendo agora possível uma extensão deste trabalho no que diz respeito à melhorias de geometria e da relação massa/resistência de nervuras e longarinas com o intuito de melhorar a qualidade das aeronaves de pequeno porte.

SÃO PAULO, 15 DEZEMBRO DE 1999.



PEDRO IVO DUARTE PINTO

BIBLIOGRAFIA

- "Fundamentals of Aerodynamics" " -John D. Anderson Jr., 3-edição 1988, Ed. MacGrawHill
- "Theory of Wing Sections" -Ira R. Abbott, 1959, Dover Publications Inc.
- "Dynamics of Atmospheric Flight" -Bernard Etkin, 1972, John Wiley and Sons Inc
- "Basic Aerodynamics" -C. B. Stirbling, 1984, Ed. Butterworths and Co. Ltd
- "Mecânica dos Fluidos" -V.L.Streeter and E. B. Wylie, 1982, ed. MacGrawHill